MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
BERLIN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
BERLIN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

BLASCHKE L. FEJER E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

5. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1919

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
BERLIN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
BERLIN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJER E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

5. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1919

Inhaltsverzeichnis

Seite

Hausdorff, F., Über halbstetige Funktionen und deren Verallgemeinerung . . 292
Hensel, K., Neue Begründung der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen 118
Hilb, E., Über die Laplacesche Reihe 17
Jolles, St., Eine neue Polarentheorie der Raumkurven dritten Grades 169
Kornblum, H., Über die Primfunktionen in einer arithmetischen Progression . 100
Landau, E., Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn Carleman: Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion 147
Landau, E., Über die Gitterpunkte in einem Kreise 319
Lichtenstein, L., Untersuchungen über zweidimensionale reguläre Variationsprobleme. Zweite Abhandlung. Das einfachste Problem bei fester und bei freier Begrenzung 26
Liebmann, H., Die Verbiegung analytischer Eiflächen 132
Mises, R. v., Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung 52
Mohrmann, H., Über die Wendepunktstangenten der Raumkurve vierter Ordnung erster Art 268
Perron, O., Ein neuer Beweis des Fundamentalsatzes in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung 154
Rella, T., Die Zerlegungsgesetze für die Primideale eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers im Körper der l-ten Einheitswurzeln 11
Reye, Th., Axial symmetrische kubische Raumkurven 161
Scheffers, G., Eigenschaften der Integralflächen der partiellen Differentialgleichung $s^2 - rt = \text{konst.}$ 112
Schmeidler, W., Über die Zerlegung der Gruppe der Restklassen eines endlichen Moduls 222
Schur, I., Einige Bemerkungen zu der vorstehenden Arbeit des Herrn A. Speiser 7
Speiser, A., Zahlentheoretische Sätze aus der Gruppentheorie 1
Steinhaus, H., Additive und stetige Funktionaloperationen 186
Tietze, H., Über stetige Kurven, Jordansche Kurvenbögen und geschlossene Jordansche Kurven 284
Veitzenböck, R., Über eine Ungleichung in der Dreiecksgeometrie 137
Vigert, S., Über das Problem der Gitterpunkte in einem Kreise 310

Zahlentheoretische Sätze aus der Gruppentheorie.

Von

A. Speiser in Zürich.

In den folgenden Zeilen wird ein System von Matrizen behandelt, s nach einem, von dem gewöhnlichen verschiedenen Gesetz der Matrizen-mposition eine Gruppe bildet. Satz 1 gibt vollständigen Aufschluß er die Natur derartiger Gruppen. § 2 enthält Anwendungen auf die age, welches der einfachste algebraische Körper ist, in dem eine arstellung einer endlichen Gruppe von Matrizen (im gewöhnlichen Sinne) geben werden kann[1]). Wir zeigen u. a., daß dies für eine irreduzible arstellung ungeraden Grades mit reellem Charakterensystem stets der örper der Charaktere ist.

§ 1.

Gegeben sei ein algebraischer Körper K, der in dem Grundkörper k aloissch ist und in diesem Bereich die Gruppe $\mathfrak{G}$ mit den Elementen $, A, B, \ldots, S, T, \ldots$ besitzt.

Wir definieren nun eine Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}$ durch Matrizen ch einem von dem gewöhnlichen verschiedenen Gesetz der Zusammen-tzung.

Definition: Jedem Element $E, A, B, \ldots$ von $\mathfrak{G}$ sei eine Matrix

$$M_E, M_A, M_B, \ldots$$

n nicht verschwindender Determinante zugeordnet, deren Koeffizienten K liegen. Die konjugiert algebraischen Matrizen seien:

$$M_E^S, M_A^S, \ldots \qquad (S = E, A, B, \ldots)$$

[1]) Über dieses Problem vgl. die grundlegende Abhandlung von Herrn I. Schur: ithmetische Untersuchungen über endliche Gruppen linearer Substitutionen, Berl. r. 1906, S. 164–184.

Diese Matrizen mögen folgendem Gruppengesetz gehorchen:

$$\mathfrak{A}: \qquad M_S^T M_T = M_{ST}.$$

Man überzeugt sich leicht, daß das assoziative Gesetz erfüllt ist. Setzt man $S = E$, so ergibt sich:

$$M_E^T M_T = M_{ET} = M_T, \quad \text{also} \quad M_E = E = (e_{ik}). \qquad e_{ik} = \begin{matrix} 1\,(i = k) \\ 0\,(i \neq k) \end{matrix}$$

Zunächst zeigen wir, daß es derartige Darstellungen gibt. Sei nämlich M eine Matrix in K mit von 0 verschiedener Determinante; setzt man

$$M_S = (M^S)^{-1} M, \qquad (S = E, A, B, \ldots$$

so genügen diese Matrizen $M_E, M_A, M_B, \ldots$ der Definition, denn es wird

$$M_S^T M_T = ((M^S)^{-1} M)^T (M^T)^{-1} M = (M^{ST})^{-1} M = M_{ST}.$$

Zu jeder Gruppe lassen sich unendlich viele *äquivalente* angeben. Sei N eine beliebige Matrix in K, so bilden die Matrizen

$$M_E, (N^A)^{-1} M_A N, (N^B)^{-1} M_B N, \ldots$$

wiederum eine Gruppe nach dem Gesetz $\mathfrak{A}$. Irgendeine Darstellung von $\mathfrak{G}$ im Grundkörper k bildet auch bei dieser Zusammensetzung eine Gruppe, denn der Übergang zu den konjugierten Matrizen bewirkt alsdann ganz keine Veränderung. Insbesondere bildet die identische Darstellung, deren Matrizen sämtlich in der Einheitsmatrix bestehen, eine Gruppe nach $\mathfrak{A}$, und wir zeigen nun, daß jede Gruppe mit der identischen Darstellung äquivalent ist, d. h. wir beweisen den

Satz 1: *Bilden die Matrizen $M_E, M_A, \ldots$ eine Gruppe nach der obigen Definition, so gibt es in K eine Matrix M dergestalt, daß*

$$M_S = (M^S)^{-1} M$$

ist.

Beweis: Wir bilden die Summe aller Matrizen

$$M_E + M_A + \ldots = M.$$

Nach dem Gesetz der Zusammensetzung wird

$$M^S M_S = \sum_T M_T^S M_S = \sum_T M_{TS} = M.$$

Ist die Determinante von M von 0 verschieden, so ist unser Satz bereits bewiesen, denn aus der eben hingeschriebenen Formel folgt:

$$M_S = (M^S)^{-1} M.$$

Um den Satz allgemein zu beweisen, zeigen wir seine Richtigkeit für

Fall, daß die Matrizen aus einer Zeile und Kolonne bestehen, also öhnliche Zahlen sind, und wenden dann vollständige Induktion an.

Wir bezeichnen also M_S mit α_S und verstehen unter β eine Zahl K, deren Diskriminante relativ zu k von 0 verschieden ist, und den nun die Zahlen:

$$\sum_S (\beta^S)^i \alpha_S = \omega^{(i)}. \qquad (i = 0, 1, \ldots)$$

ndestens eine unter ihnen ist von 0 verschieden, andernfalls müßten $\alpha_S = 0$ sein. Sei $\omega^{(i)} \neq 0$, so wird

$$\alpha_T = (\omega^{(i)T})^{-1} \omega^{(i)},$$

mit der Satz bewiesen ist.

Ein Spezialfall dieses eben bewiesenen Satzes ist Satz 90 im Zahlenicht[2]) von Hilbert: Jede ganze oder gebrochene Zahl A eines relativ klischen Körpers, deren Relativnorm in bezug auf den Grundkörper ich 1 ist, wird die symbolische $(1 - S)$-te Potenz einer gewissen ganzen hl B. In der Tat sei der Relativgrad l, so bilden die Zahlen

$$1, A, AA^S, \ldots, \quad AA^S A^{S^2} \ldots A^{S^{l-2}}$$

e Gruppe nach der obigen Definition, und so wird

$$A = (B^S)^{-1} B.$$

Wir nehmen nun den Satz als bewiesen an für Matrizen mit weniger n Zeilen und Kolonnen und zeigen seine Gültigkeit für die Anzahl n. Sei wiederum β eine Zahl, deren Relativdiskriminante von 0 verieden ist, so bilden wir die Matrizen: $\sum_S (\beta^i)^S M_S = M^{(i)}$. Mindestens e dieser Matrizen besitzt einen Koeffizienten links oben (mit dem dex (1, 1)), der von Null verschieden ist, denn M_E hat dort die Zahl 1 hen. Die erste Zeile dieser Matrix bezeichnen wir mit

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n.$$

e Matrix M, zu der diese Zeile gehört, genügt der Gleichung:

$$M^S M_S = M.$$

es läßt sich in folgender Weise interpretieren:

Man bilde die Form:

$$\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \ldots + \omega_n x_n.$$

[2]) Jahresbericht der Deutsch. Mathem. Vereinigung, 4 (1897), S. 272

Geht man zu einer konjugierten Form über:

$$\omega_1^S x_1 + \omega_2^S x_2 + \ldots + \omega_n^S x_n$$

und übt alsdann auf die Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Substitution M aus, so gelangt man zur ursprünglichen Form zurück. In der Tat.

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$$

ist die erste Zeile von M. Eine Substitution auf die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ ist gleichbedeutend mit der transponierten Substitution auf die Koeffizienten $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Die Gleichung (1) besagt, daß die erste Zeile von M^S durch die transponierte Substitution zu M_S übergeht in die erste Zeile von M.

Wir bilden nun die n Linearformen:

$$\Omega: \quad \begin{aligned} \omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n &= y_1, \\ x_2 &= y_2, \\ &\ldots\ldots, \\ x_n &= y_n. \end{aligned}$$

Übt man auf die Variablen x die Substitution M_S aus, nachdem man die Formen ersetzt hat durch

$$\omega_1^S x_1 + \ldots + \omega_n^S x_n, \quad x_2, \ldots, x_n,$$

so bleibt y_1 ungeändert, während die anderen eine lineare Substitution erfahren.

Transformiert man also die Gruppe $M_E, M_A, \ldots$ durch Ω, so werden die Matrizen $(\Omega^S)^{-1} M_S \Omega = M_S'$ $(S = E, A, B, \ldots)$ wiederum eine Gruppe von der verlangten Art bilden, aber in der reduzierten Form erscheinen:

$$M_S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P_S & N_S \end{pmatrix},$$

wobei P_S eine Spalte von $n-1$ Koeffizienten und N_S eine Matrix von $n-1$ Zeilen und Kolonnen bedeuten. Nun bilden offenbar die Matrizen N_S $(S = E, A, B, \ldots)$ für sich eine Gruppe und nach Voraussetzung ist sie mit der identischen äquivalent:

$$N_S = (N^S)^{-1} N.$$

Transformiert man die Gruppe mit der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N^{-1} \end{pmatrix}$, so erhält man wiederum eine äquivalente Gruppe:

$$M_S'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N^S \end{pmatrix} M_S' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \ldots \cdot \\ \alpha_n & 0 & 0 \ldots 1 \end{pmatrix}$$

ıd diese Gruppe läßt sich nach der am Anfang des Beweises gegebenen ethode behandeln, die Summe aller Matrizen M_S'' besitzt eine von 0 verhiedene Determinante. Daher ist M_S'' und also auch M_S selbst mit der entischen Darstellung äquivalent, q. e. d.

§ 2.

Wir zeigen nun die Anwendungen, die sich von diesem Satz machen ssen auf das Problem des kleinsten, für eine Substitutionsgruppe notndigen Zahlkörpers.

Sei Γ eine irreduzible Substitutionsgruppe, deren Koeffizienten dem aloisschen Zahlkörper K angehören. Der Charakter von Γ möge den aloisschen Körper k bestimmen. Die Gruppe von K in k sei $\mathfrak{G}$ mit n Elementen $E, A, B, \ldots$. Dann sind die sämtlichen relativ konjuerten Darstellungen $\Gamma = \Gamma^E, \Gamma^A, \Gamma^B, \ldots$ äquivalent. Wir bezeichnen it M_S diejenige Substitution, welche Γ^S in Γ transformiert:

$$M_S^{-1}\,\Gamma^S M_S = \Gamma.$$

$_S$ ist alsdann bestimmt *bis auf einen Faktor*, d. h. bis auf eine multiikative Matrix aE und das System der M_S $(S = E, A, B, \ldots)$, bildet s auf derartige Faktoren eine Gruppe von der in der Definition behriebener Art. Angenommen, man kann die Matrizen so normieren, daß e der Definition vollständig genügen, so wird nach Satz 1 $M_S = (M^S)^{-1} M$. un bilde man die Darstellung $M\Gamma M^{-1}$, die mit Γ äquivalent ist. Die njugierten Darstellungen werden jetzt:

$$M^S \Gamma^S (M^S)^{-1}. \qquad (S = E, A, B, \ldots)$$

Nun ist aber

$$\Gamma' = M_S^{-1}\,\Gamma^S M_S = ((M^S)^{-1} M)^{-1}\,\Gamma'^S\,(M^S)^{-1} M.$$

Daher wird

$$M\Gamma M^{-1} = M^S \Gamma^S (M^S)^{-1}.$$

ie Darstellung $M\Gamma M^{-1}$ ändert sich nicht beim Übergang zu den kongierten, d. h. sie liegt im Grundkörper k. Unsere Methode gibt uns gar die Substitution, welche Γ in die Darstellung im Grundkörper überhrt. Auf diesem Weg beweisen wir nun den

Satz 2: *Wenn eine (irreduzible) Gruppe von ungeradem Grade reelle haraktere besitzt, so läßt sie sich so transformieren, daß ihre Koeffizienn in dem durch den Charakter bestimmten Körper liegen.*

Beweis: Weil das Charakterensystem reell und der Grad ungerade t, so besitzt Γ bekanntlich eine quadratische Form, die invariant ist.

Diese kann man auf die Gestalt $x_1^2 + \ldots + x_n^2$ transformieren durch nführung gewisser weiterer algebraischer Irrationalitäten. Wir können

also von vornherein annehmen, daß Γ orthogonal ist. Dasselbe gilt dann von den konjugierten Darstellungen Γ^S. Aus $\Gamma = M_S^{-1}\,\Gamma^S\,M_S$ folgt, daß auch diejenige Form die aus $x_1^2 + \ldots + x_n^2$ durch die Substitution M entsteht, invariant ist unter Γ. Nun sind aber $c\,(x_1^2 + \ldots + x_n^2)$ die einzigen invarianten quadratischen Formen, daher muß die neue Form in dieser Gestalt enthalten sein. Aus dem bekannten Satz über die Determinanten quadratischer Formen folgt:

$$c^n = d^2,$$

wobei wir zur Abkürzung d gleich der Determinante von M_S setzen. Nun ist n ungerade, daher $\frac{n-1}{2}$ eine ganze Zahl und $d \cdot c^{-\frac{n-1}{2}} = e$ eine Zahl in K, die der Gleichung $e^n = d$ genügt.

Indem man M_S mit $\frac{1}{e}$ multipliziert, erhält man eine orthogonale Matrix, deren Determinante 1 ist.

Dadurch ist aber der multiplikative Faktor festgelegt, denn $x_1^2 + \ldots + x_n^2$ bleibt nur bei den beiden Multiplikationen $x_i' = x_i$ und $x_i' = -x_i$ ungeändert, die letztere hat die Determinante -1, weil n ungerade ist. Wir denken uns nun alle Matrizen M_S in dieser Weise normiert, dann bilden sie, wie leicht ersichtlich, nach der Definition $\mathfrak{M}$ eine Gruppe.

Satz 3: *Wenn eine irreduzible Substitutionsgruppe von gerade[m] Grade mit reellem Charakterensystem eine Substitution enthält, welche die charakteristische Wurzel $+1$ oder -1 in ungerader Vielfachheit besitzt, so läßt sie sich so transformieren, daß ihre Koeffizienten im Körper der Charaktere liegen.*

Beweis: Sei S diese Substitution und sei etwa $+1$ die Wurzel, die m-mal vorkommt (m ungerade). Dann läßt sich S so im Körper transformieren, daß sie die Gestalt hat: $m \cdot 1 + S'$, d. h. daß in der Hauptdiagonalen erst m-mal die Zahl 1 steht, alsdann die Matrix S' mit $n - m$ Zeilen und Kolonnen folgt und der Rest aus 0 besteht. S' kann als orthogonale Matrix angenommen werden.

Nunmehr ist jede Matrix, welche $m \cdot 1 + S'$ in eine konjugierte $m \cdot 1 + \bar{S}$ transformiert, *reduziert* und besteht aus zwei Bestandteilen, einem vom Grade m und einem vom Grade $n - m$. Denn zunächst gibt es gewiß *eine* solche und ferner ist jede mit ihr vertauschbare Matrix ebenfalls von dieser Beschaffenheit. Die Matrizen M_S zerfallen also in zwei Bestandteile von ungeradem Grade, die beide für sich eine Gruppe bilden. Daher läßt sich der Satz 2 anwenden.

(Eingegangen am 15. Februar 1919.)

Einige Bemerkungen zu der vorstehenden Arbeit des Herrn A. Speiser[1].

Von

I. Schur in Berlin.

Das Problem, die einfachsten algebraischen Zahlkörper zu bestimmen, in denen eine gegebene endliche Gruppe linearer Substitutionen rational darstellbar ist, gehört zu den schwierigsten Aufgaben der Gruppentheorie. In der vorstehenden Arbeit ist es Herrn Speiser gelungen, zu den bis jetzt erledigten Spezialfällen einige neue interessante Fälle hinzuzufügen. Besonders bemerkenswert ist sein Satz über irreduzible Gruppen ungeraden Grades mit reellem Charakter. Die Grundlage seiner Untersuchungen bildet der an und für sich interessante zahlentheoretische Satz, den Herr Speiser im § 1 seiner Arbeit ableitet. Im folgenden will ich zeigen, daß die in meiner Arbeit „Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere“[2] entwickelten Methoden es gestatten, auf kürzerem Wege ein allgemeineres Resultat zu erhalten.

Es bedeute wie bei Herrn Speiser K einen algebraischen Zahlkörper, der in bezug auf den Grundkörper k ein Normalkörper ist. Die Galoissche Gruppe von K relativ zu k sei

$$\mathfrak{G} = G_0 + G_1 + \ldots + G_{g-1}.$$

Ist $A = (a_{\varkappa\lambda})$ eine Matrix, deren Koeffizienten dem Körper K angehören, so bezeichne man die zu A in bezug auf k konjugiert algebraischen Matrizen mit

$$A^S = (a_{\varkappa\lambda}^S) \qquad (S = G_0, G_1, \ldots, G_{g-1}).$$

Ordnet man den g Elementen S von $\mathfrak{G}$ in K rationale Matrizen M_S des Grades m mit nicht verschwindenden Determinanten zu, für die Gleichungen der Form

[1] Vgl. A. Speiser, Zahlentheoretische Sätze aus der Gruppentheorie. Diese Zeitschrift, 5 (1919), S. 1–6.

[2] Sitzungsberichte der Berliner Akademie, Jahrg. 1905, S. 406–432.

(1) $$M_S^T M_T = r_{S,T} M_{ST} \qquad (S, T = G_0, G_1, \ldots, G_{g-1})$$

bestehen, so sprechen wir von einer *zum Faktorensystem $r_{S,T}$ gehörenden Darstellung* $\mathfrak{M} = \{M_S\}$ des Grades m von $\mathfrak{G}$. Für jede in K rationale Matrix A des Grades m, deren Determinante nicht verschwindet, bilden zugleich mit den M_S auch die Matrizen

$$N_S = A^S M_S A^{-1}$$

eine zum Faktorensystem $r_{S,T}$ gehörende Darstellung $\mathfrak{N}$, die zu $\mathfrak{M}$ *äquivalent* heißen möge. Die Darstellung $\mathfrak{M}$ nennen wir *irreduzibel*, wenn sich keine zu ihr äquivalente Darstellung $\mathfrak{N}$ angeben läßt, die in den üblichen Bezeichnungen die Form

$$\mathfrak{N} = \begin{pmatrix} \mathfrak{N}_1 & 0 \\ \mathfrak{N}_3 & \mathfrak{N}_4 \end{pmatrix}$$

hat.

Multipliziert man die Matrizen M_S der Darstellung $\mathfrak{M}$ mit irgendwelchen von Null verschiedenen Größen c_S des Körpers K, so bilden die Matrizen $c_S M_S$ eine neue Darstellung, die zum Faktorensystem

$$r'_{S,T} = \frac{c_S^T c_T}{c_{ST}} r_{S,T}$$

gehört. Zwei derartige Faktorensysteme sind als nicht wesentlich voneinander verschieden anzusehen, sie mögen als einander *assoziiert* bezeichnet werden. Gehört zu einem Faktorensystem $r_{T,S}$ eine Darstellung $\{M_S\}$ des Grades m, so lehrt die Betrachtung der Determinanten der Matrizen M_S, daß die m-ten Potenzen der Zahlen $r_{S,T}$ ein dem System $\varrho_{S,T} = 1$ assoziiertes Faktorensystem bilden.

Satz I. *Damit sich zu g^2 von Null verschiedenen Größen $r_{S,T}$ des Körpers K eine zu diesem Faktorensystem gehörende Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}$ angeben lasse, ist notwendig und hinreichend, daß sie den g^3 Gleichungen*

(2) $$r_{S,T}^U r_{ST,U} = r_{S,TU} r_{T,U} \qquad (S, T, U = G_0, G_1, \ldots, G_{g-1})$$

genügen. In jedem Falle ist das Faktorensystem $r_{S,T}^g$ dem System $\varrho_{S,T} = 1$ assoziiert.

Daß für die Größen $r_{S,T}$ eines Faktorensystems die Gleichungen (2) bestehen müssen, folgt unmittelbar aus den Gleichungen (1) auf Grund des assoziativen Gesetzes. Andere Bedingungen kommen aber nicht hinzu. Denn genügen die (von Null verschiedenen) Größen $r_{S,T}$ von K den Gleichungen (2) und setzt man ε_S gleich 1 oder 0, je nachdem S dem Einheitselement E von $\mathfrak{G}$ gleich oder von ihm verschieden ist, so bilden, wie man leicht zeigt, die g Matrizen

$$M_S = (r_{P^{-1},PQ^{-1}\varepsilon_{PQ^{-1}}S^{-1}}) \quad (P,Q = G_0,G_1,\ldots,G_{g-1})$$

s Grades g eine zum Faktorensystem $r_{S,T}$ gehörende Darstellung der ruppe ($\mathfrak{G}$[3]). Hieraus folgt zugleich unsere Behauptung über die Zahlen $r^g_{S,T}$.

Satz II. *Sind $\mathfrak{M} = \{M_S\}$ und $\mathfrak{N} = \{N_S\}$ zwei zum Faktorensystem $r_{S,T}$ gehörende Darstellungen der Grade m und $n \geqq m$ von $\mathfrak{G}$, läßt sich stets eine Matrix A des Ranges m mit m Zeilen und n Spalten angeben, deren Koeffizienten dem Körper K angehören und die $n\,g$ Gleichungen*

$$A^S N_S = M_S A \qquad (S = G_0, G, \ldots, G_{g-1})$$

nügt.

Ist nämlich U eine beliebige in K rationale Matrix mit m Zeilen d n Spalten, und setzt man

$$A = \sum_R M_R^{-1} U^R N_R, \qquad (R = G_0, G_1, \ldots, G_{g-1})$$

wird

$$S^{-1} A^S N_S = \sum_R M_S^{-1} (M_R^S)^{-1} U^{RS} \cdot r_{R,S} N_{RS} = \sum_R M_{RS}^{-1} U^{RS} N_{RS} = A,$$

il

$$M_R^S M_S = r_{R,S} M_{RS}, \quad \text{also} \quad r_{R,S} M_S^{-1} (M_R^S)^{-1} = M_{RS}^{-1}$$

Wir haben also nur noch zu zeigen, daß die Matrix (5) bei passender ahl von U den Rang m erhält. Dies ergibt sich folgendermaßen.

Bilden die Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_g$ eine Basis des Körpers K in bezug f den Grundkörper k, so kann $U = \sum \omega_\gamma U_\gamma$ gesetzt werden, wobei die effizienten $u_{\mu\nu}^{(\gamma)}$ der g Matrizen U_γ beliebige Größen des Körpers k beiten können. Es wird dann

$$U^R = \sum_{\gamma=1}^{g} \omega_\gamma^R U_\gamma$$

n fasse nun irgendeine Unterdeterminante D des Grades m von A ins ge. Würde D für alle $u_{\mu\nu}^{(\gamma)}$ von k verschwinden, so müßte das auch reffen, wenn die $u_{\mu\nu}^{(\gamma)}$ ganz beliebige Größen bedeuten. Da aber die terminante der g^2 Zahlen ω_γ^R von Null verschieden ist, so können wir U_γ so wählen, daß in (6) an Stelle der zu U algebraisch konjugierten trizen U^R beliebig vorgeschriebene Matrizen U_R treten. Ist nun B e ganz beliebige Matrix mit m Zeilen und n Spalten und setzen wir $= M_R B N_R^{-1}$, so tritt in (5) an Stelle von A die Matrix gB. Da

[3]) Vgl. die analoge Betrachtung in meiner Arbeit, „Über die Darstellung der lichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen", Journ. für Math., (1904), S. 20–50 [S. 24].

hierin die Unterdeterminante D gewiß nicht identisch Null ist, so kan D auch nicht für alle Matrizen U mit Koeffizienten aus dem Körper verschwinden.

Nimmt man insbesondere $m = n$ an, so folgt aus dem Satze II, d *zwei Darstellungen, die zu demselben Faktorensystem gehören, stets ei ander äquivalent sind, wenn nur ihre Grade übereinstimmen.* Für d Faktorensystem $r_{S,T} = 1$ liefert dies schon das Resultat des Herrn Speise

Ist ferner $m < n$ und genügt die in K rationale Matrix A d Ranges m den Gleichungen (4), so können wir zwei Matrizen P und der Grade m und n mit nicht verschwindenden Determinanten bestimme deren Koeffizienten dem Körper K angehören, so daß

$$A^* = PAQ^{-1} = (E_m, 0)$$

wird, wobei E_m die Einheitsmatrix des Grades m bedeutet. Setzt m dann

$$P^S M_S P^{-1} = M_S^*, \quad Q^S N_S Q^{-1} = N_S^*,$$

so wird

$$A^* N_S^* = M_S^* A^*.$$

Hieraus folgt aber, daß die Darstellung $\mathfrak{N}^* = \{N_S^*\}$ die Form

$$\mathfrak{N}^* = \begin{pmatrix} \mathfrak{M}^* & 0 \\ \mathfrak{N}_3 & \mathfrak{N}_4 \end{pmatrix}$$

hat. Sind also insbesondere $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ beide irreduzibel, so muß $m =$ sein und die beiden Darstellungen sind einander äquivalent. Als Schlu resultat ergibt sich nun ohne weiteres:

Satz III. *Sieht man zwei äquivalente Darstellungen als nicht v einander verschieden an, so gehört zu jedem Faktorensystem $r_{S,T}$ n eine irreduzible Darstellung $\mathfrak{M}$. Der Grad n jeder anderen zu $r_{S,T}$ hörenden Darstellung $\mathfrak{N}$ ist ein Vielfaches des Grades m von $\mathfrak{M}$ und ist der Darstellung*

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{M} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mathfrak{M} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \mathfrak{M} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

äquivalent, die $\mathfrak{M}$ genau $\frac{n}{m}$-mal enthält. Dies gilt insbesondere auch die Darstellung (3), *und daher ist m ein Teiler der Ordnung g Gruppe $\mathfrak{G}$.*

(Eingegangen am 8. April 1919.)

Die Zerlegungsgesetze für die Primideale eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers im Körper der l-ten Einheitswurzeln.

Von

Tonio Rella in Wien.

Es bedeute l eine ungerade Primzahl, $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{l}}$, k sei ein algebraischer Zahlkörper, der mit dem Körper der l-ten Einheitswurzeln einen Körper vom Grade m (Teiler von $l-1$) gemein hat. Dann ist der aus k und ζ zusammengesetzte Körper (k, ζ) vom Relativgrad $\frac{l-1}{m}$ über k. Die Zerlegung der Primideale von k in (k, ζ) wird durch folgende zwei Gesetze bestimmt:

1. Ist p eine von l verschiedene Primzahl, $\mathfrak{p}$ ein in p aufgehendes Primideal von k vom Grade f, gehört ferner p nach dem Modul l zum Exponenten f_0 und ist ff' das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von f und f_0, so zerfällt $\mathfrak{p}$ in (k, ζ) in z' Primideale vom Relativgrad f', wenn $\frac{l-1}{m} = f'z'$.

2. Ist $\mathfrak{l}$ ein in l aufgehendes Primideal von k vom Grade f und der Ordnung e, d der größte gemeinschaftliche Teiler von e und $l-1$, n die größte ganze Zahl, für welche eine Kongruenz gilt

$$-l \equiv \alpha^n (\mathfrak{l}^{e+1}),$$

wobei α eine ganze Zahl von k bedeutet, d_1 der größte gemeinschaftliche Teiler von n und $l-1$, so ist m ein Teiler von d_1 und d_1 ein Teiler von d und wenn

$$d = f'd_1 = f'z'm$$

gesetzt wird, so wird $\mathfrak{l}$ in (k, ζ) zerlegt in

$$\mathfrak{l} = (\mathfrak{L}\mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_{z'-1})^{\frac{l-1}{d}}, \qquad N_k \mathfrak{L}_i = \mathfrak{l}^{f'},$$

wobei N_k die bezüglich k genommene Norm bedeutet.

Beweis für 1.

Jede für den Bereich von p ganze Zahl[1]) von (k, ζ) hat die Gestalt

$$(1) \qquad A = \alpha_0 + \alpha_1 \zeta + \ldots + \alpha_{n-1} \zeta^{n-1}, \qquad n = \frac{l-1}{m},$$

wobei die α_i für den Bereich von p ganze Zahlen von k bedeuten; denn in der Gestalt (1) ist jede Zahl von (k, ζ) darstellbar, wenn die α_i Zahlen von k sind. Ist aber A für den Bereich von p ganz, so sind auch die zu A relativ konjugierten Zahlen für den Bereich von p ganz und die α stellen sich als Brüche dar, deren Zähler für den Bereich von p ganz und deren Nenner ganz ist und in einer Potenz von l aufgeht, daher zu p teilerfremd ist.

Es sei $\mathfrak{p}$ ein in p aufgehendes Primideal von k,

$$N\mathfrak{p} = p^f = P$$

f' die kleinste positive Zahl, für welche

$$(2) \qquad P^{f'} \equiv 1 \pmod{l}$$

gilt.

Andererseits ist nach Voraussetzung f_0 die kleinste positive Zahl für welche

$$(3) \qquad p^{f_0} \equiv 1 \pmod{l}$$

gilt, dann ist ersichtlich ff' das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von f und f_0.

Aus (1) folgt, daß für jede für den Bereich von p ganze Zahl A

$$(4) \qquad A^{pff'} \equiv A \,(\mathfrak{P})$$

folgt, wenn $\mathfrak{P}$ ein in $\mathfrak{p}$ aufgehendes Primideal von (k, ζ) bedeutet. $\mathfrak{p}$ kann in (k, ζ) nur in verschiedene Primideale zerfallen, da $\mathfrak{p}$ in der Relativdiskriminante von (k, ζ) bezüglich k nicht aufgehen kann; es sei F der Grad von $\mathfrak{P}$, dann folgt aus (4), da diese Kongruenz für jede ganze Zahl von (k, ζ) gilt,

$$p^{ff'} \geqq p^F, \quad \text{also} \quad ff' \geqq F.$$

Andererseits folgt für $A = \zeta$ aus dem Fermatschen Satz

$$\zeta^{p^F - 1} \equiv 1 \,(\mathfrak{P})$$

und daher

$$p^F \equiv 1 \pmod{l},$$

also F ein Vielfaches von f_0.

---

[1]) Für den Bereich von p heißt eine Zahl ganz, wenn sie als Bruch mit zu p teilerfremdem Nenner dargestellt werden kann.

Weil aber schließlich (k, ζ) ein (relativ zyklischer) Körper über k t, muß F auch ein Vielfaches von f sein, und daraus folgt die Behaup- ng, weil ff' das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von f und f_0 ist nd $F \leqq ff'$.

Beweis für 2.

Es gelte in k die Zerlegung.

5) $$l = \mathfrak{l}^e \mathfrak{a}, \ (\mathfrak{a}, \mathfrak{l}) = 1, \qquad N\mathfrak{l} = l^f;$$

n Körper der l-ten Einheitswurzeln gilt

6) $$l = \mathfrak{l}_0^{l-1}, \qquad N\mathfrak{l}_0 = l, \qquad \mathfrak{l}_0 = (1 - \zeta).$$

Da k mit dem Körper ζ einen Unterkörper vom Grade m gemein aben soll, so muß e ein Vielfaches von m sein. Es sei

7) $$d = (l - 1, e) = m\,m'.$$

In (k, ζ) werde nun $\mathfrak{l}$ weiter zerlegt in

8) $$\mathfrak{l} = (\mathfrak{L}\mathfrak{L}_1 \dots \mathfrak{L}_{z'-1})^{g'}, \qquad N_k \mathfrak{L}_i = \mathfrak{l}^{f'},$$

aher

9) $$l = \mathfrak{L}^{g'e}\mathfrak{A}, \qquad \mathfrak{A} \text{ ein zu } \mathfrak{L} \text{ teilerfremdes Ideal.}$$

Da aber (k, ζ) ein Oberkörper von ζ ist, so muß $g'e$ ein Vielfaches on $l - 1$ und daher g' ein Vielfaches von $\frac{l-1}{d}$ sein. Es sei

10) $$g' = \frac{l-1}{d} e',$$

so

$$\frac{l-1}{d} \cdot e' \cdot f' \cdot z' = \frac{l-1}{m} = \frac{l-1}{d} m',$$

lglich

11) $$m' = e' f' z'.$$

Bedeutet r eine primitive Kongruenzwurzel von l, s die Permutation ζ^r, $s_1 = s^m$, so ist die Gruppe von (k, ζ) bezüglich k gleich $s_1^{x_1}$, $= 0, 1, \dots, \frac{l-1}{m} - 1$, die Zerlegungsgruppe von $\mathfrak{L}$ bezüglich k gleich $'^{x_2}$, $x_2 = 0, 1, \dots, \frac{l-1}{mz'} - 1$, die Trägheitsgruppe von $\mathfrak{L}$, bezüglich k eich $s_1^{z'f'x_3}$, $x_3 = 0, 1, \dots, \frac{l-1}{mf'z'} - 1$.

Aus (5) und (8) folgt

12) $$N\mathfrak{L} = l^{ff'}.$$

Nun bedeute H eine primitive Kongruenzwurzel von $\mathfrak{L}$ so daß also $' - 1$ die niedrigste positive Potenz von H ist, für die

13) $$\mathsf{H}^{lff'} \equiv 1 (\mathfrak{L})$$

lt.

Es sei η eine primitive Kongruenzwurzel von $\mathfrak{l}$ in k, für welche dahe $l^f - 1$ der niedrigste positive Exponent ist, so daß

$$\eta^{l^f-1} \equiv 1 (\mathfrak{l}), \tag{14}$$

und ich kann und will annehmen, daß

$$\eta \equiv \mathsf{H}^{\frac{l^{ff'}-1}{l^f-1}} (\mathfrak{L}). \tag{15}$$

Aus $\lambda_0 = 1 - \zeta$ folgt

$$0 = \frac{1-\zeta^l}{1-\zeta} = \frac{1-(1-\lambda_0)^l}{\lambda_0} = l - \binom{l}{2}\lambda_0 + \ldots + \lambda_0^{l-1}$$

und daher

$$l \equiv -\lambda_0^{l-1} (\mathfrak{l}_0^l). \tag{16}$$

In k soll die Kongruenz gelten

$$-l \equiv \eta^x \lambda^e (\mathfrak{l}^{e+1}), \quad (\lambda \text{ eine durch } \mathfrak{l} \text{ aber nich} \tag{17}$$

durch $\mathfrak{l}^2$ teilbare ganze Zahl von k)

und in (k, ζ) sei

$$\lambda \equiv \mathsf{H}^y \Lambda^{\frac{l-1}{d}e'} (\mathfrak{L}^{\frac{l-1}{d}e'+1}) \tag{18}$$

und

$$\lambda_0 \equiv \mathsf{H}^u \Lambda^{\frac{ee'}{d}} (\mathfrak{L}^{\frac{ee'}{d}+1}), \tag{19}$$

wobei Λ eine durch $\mathfrak{L}$ aber nicht durch $\mathfrak{L}^2$ teilbare ganze Zahl von $(k,$ bedeutet.

Die Permutation s kann so gewählt werden, daß für die Permutatio $s_2 = s_1^{z'}$, welche durch ihre Potenzen die Zerlegungsgruppe von $\mathfrak{L}$ bezü lich k erzeugt,

$$s_2 \mathsf{H} \equiv \mathsf{H}^{l^f} (\mathfrak{L}) \tag{20}$$

gilt.

Für die primitive Kongruenzwurzel r gilt eine Kongruenz

$$r \equiv \mathsf{H}^t \frac{l^{ff'}-1}{l-1} (\mathfrak{L}), \tag{21}$$

wobei $(t, l-1) = 1$.

Es ist nun $s_3 = s_1^{z'f'}$ eine Permutation der Trägheitsgruppe von $\mathfrak{L}$ b züglich k, daher gilt eine Kongruenz

$$s_3 \Lambda \equiv \mathsf{H}^e \Lambda (\mathfrak{L}^2), \tag{22}$$

und aus $s_3^{\frac{l-1}{d}e'} = 1$ folgt

$$\Lambda \equiv \mathsf{H}^e \frac{l-1}{d} e' \Lambda (\mathfrak{L}^2),$$

$$\varrho\frac{l-1}{d}e' \equiv 0 \pmod{l^{ff'}-1}.$$

Andrerseits folgt aus (19) und (21)

$$s_3\lambda_0 \equiv r^{mz'f'}\lambda_0 \equiv \mathsf{H}^{tmz'f'\frac{l^{ff'}-1}{l-1}}\lambda_0 \equiv \mathsf{H}^{\frac{ee'}{d}\varrho}\lambda_0(\mathfrak{L}^{\frac{ee'}{d}+1}),$$

$$\varrho\frac{ee'}{d} \equiv tmz'f'\frac{l^{ff'}-1}{l-1} \pmod{l^{ff'}-1}.$$

Wird (23) mit e und (24) mit $l-1$ multipliziert und beide Kongruenzen nach dem Modul $d(l^{ff'}-1)$ genommen, so folgt

$$tmz'f'(l^{ff'}-1) \equiv 0 \pmod{d(l^{ff'}-1)}.$$

$$tmz'f' \equiv 0 \pmod{d = me'f'z'},$$

$$t \equiv 0 \pmod{e'};$$

ist ein Teiler von $l-1$, t zu $l-1$ teilerfremd, daher

$$e' = 1.$$

Es sei ferner

$$s_2\Lambda \equiv \mathsf{H}^{\sigma}\Lambda(\mathfrak{L}^2),$$

n folgt aus (18) und (20) wegen $s_2\lambda = \lambda$

$$\lambda \equiv \mathsf{H}^{y\iota f+\sigma\frac{l-1}{d}}\Lambda^{\frac{l-1}{d}} = \mathsf{H}^{y(\iota f-1)+\sigma\frac{l-1}{d}}\lambda(\mathfrak{L}^{\frac{l-1}{d}+1}),$$

er

$$y(l^f-1)+\sigma\frac{l-1}{d} \equiv 0 \pmod{l^{ff'}-1}.$$

Aus (19) folgt wegen $s_2\lambda_0 \equiv r^{mz'}\lambda_0(\mathfrak{l}_0^2)$

$$s_2\lambda_0 \equiv \mathsf{H}^{\iota mz'\frac{l^{ff'}-1}{l-1}}\lambda_0 \equiv \mathsf{H}^{u(\iota f-1)+\sigma\frac{e}{d}}\lambda_0(\mathfrak{L}^{\frac{e}{d}+1}),$$

er

$$u(l^f-1)+\sigma\frac{e}{d} \equiv tmz'\frac{l^{ff'}-1}{l-1} \pmod{l^{ff'}-1};$$

aus (16), (17), (18) und (19) folgt schließlich

$$-l \equiv \eta^x\lambda^e \equiv \mathsf{H}^{x\frac{l^{ff'}-1}{\iota f-1}+ey}\Lambda^{\frac{(l-1)e}{d}} \equiv \mathsf{H}^{u(l-1)}\Lambda^{\frac{(l-1)e}{d}}(\mathfrak{L}^{\frac{(l-1)e}{d}+1}),$$

er

$$x\frac{l^{ff'}-1}{l^f-1}+ey \equiv u(l-1) \pmod{l^{ff'}-1}.$$

Multipliziere ich (31) mit l^f-1, (30) mit $l-1$, (29) mit e, be-

trachte alle Kongruenzen nach dem Modul $d(l^{ff'}-1)$ und addiere alle dr Kongruenzen ((29) mit vertauschten Seiten), so folgt

$$x(l^{ff'}-1) \equiv t m z'(l^{ff'}-1) \pmod{d(l^{ff'}-1)}, \tag{32}$$

$$x \equiv t m z'. \pmod{d}; \tag{33}$$

mz' ist ein Teiler von d, t ist zu $l-1$ und daher auch zu d teilerfrem Setze ich

$$x = m z' x_1, \quad d = m z' f',$$

so folgt aus (33), daß x_1 und f' teilerfremd sein müssen und es g eine Kongruenz

$$-l \equiv \eta^x \lambda^e \equiv (\eta^{x_1} \lambda^{\frac{e}{d} f'})^{m z'} (\mathfrak{l}^{e+1}). \tag{34}$$

Ist andererseits

$$-l \equiv \alpha^n (\mathfrak{l}^{e+1}), \tag{35}$$

so muß für α eine Kongruenz gelten

$$\alpha \equiv \eta^a \lambda^{\frac{e}{n}} (\mathfrak{l}^{\frac{e}{n}+1}), \quad \left(\frac{e}{n} \text{ eine ganze Zahl}\right) \tag{36}$$

$$-l \equiv \alpha^n \equiv (\eta^a \lambda^{\frac{e}{n}})^n (\mathfrak{l}^{e+1}). \tag{37}$$

Da aber n die größte ganze Zahl sein soll, für welche eine Kongrue der Gestalt (35) gilt, so muß n ein Vielfaches von mz' sein

$$n = m z' n_1$$

und durch Vergleich von (34) und (33) folgt weiter

$$a n_1 \equiv x_1 \pmod{l^f - 1}.$$

Da x_1 zu f' teilerfremd ist und f' ein Teiler von $l^f - 1$, so m daher auch n_1 zu f' teilerfremd sein und daher ist

$$d_1 = (n, l-1) = (n, e, l-1) = (n, d) = m z'(n_1, f') = m z', \tag{38}$$

womit die Behauptung erwiesen ist.

(Eingegangen am 24. Februar 1919.)

Über die Laplacesche Reihe.

Von

Emil Hilb in Würzburg.

Es sei $f(\theta, \varphi)$ eine für jeden Punkt der Einheitskugel eindeutig de-
ierte stetige Funktion, die dem absoluten Betrage nach unterhalb einer
sten Grenze bleibt. Dann gehört zunächst formal zu $f(\theta, \varphi)$ die Laplace-
he Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \iint_K f(\theta', \varphi') P_n(\cos\gamma') do',$$

bei θ', φ' die sphärischen Koordinaten irgendeines Punktes der Kugel-
erfläche sind, do' das zugehörige Flächenelement bedeutet; γ' ist der
härische Abstand der Punkte θ, φ und θ', φ', $P_n(\cos\gamma')$ das zum Index n
hörige Legendresche Polynom. Durch Koordinatentransformation[1])
chen wir θ zu Null; dann wird $\gamma' = \theta'$ und $do' = \sin\theta' d\theta' d\varphi'$, wobei
$\leqq \theta' \leqq \pi$, $0 \leqq \varphi' \leqq 2\pi$. Wir setzen

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta', \varphi')\, d\varphi' = F(\theta')$$

d erhalten

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} F(\theta') P_n(\cos\theta') \sin\theta' d\theta'.$$

Fejér[2]) zeigt nun, daß die Folge der Hölderschen und also auch
Cesàroschen Mittelwerte zweiter Ordnung der Partialsummen dieser
ihe nach $F(0)$, also dem Werte von $f(\theta', \varphi')$ für $\theta' = 0$ konvergiert.
rüber hinaus zeigte Gronwall[3]) daß *schon die Folge der arithmetischen*
ittel erster Ordnung diese Eigenschaft hat.

[1]) Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, Leipzig 1878. S. 309, Gleichung a.
[2]) L. Fejér, Über die Laplacesche Reihe. Math. Ann. 67 (1909), S. 76–109.
[3]) T. H. Gronwall, Über die Laplacesche Reihe, Math. Ann. 74 (1913),
213–270.

Der Kernpunkt seiner Ableitung liegt in dem Nachweise[4]), daß

$$\text{(III)} \qquad \int_0^{\pi} |K_n^*(1,\theta)\sin\theta|\,d\theta$$

für alle n unterhalb einer festen endlichen Grenze bleibt, wenn

$$\text{(1)} \qquad K_n(1,\theta) = \tfrac{1}{2}P_0(\cos\theta) + \tfrac{3}{2}P_1(\cos\theta) + \ldots + \frac{2n+1}{2}P_n(\cos\theta),$$

$$\text{(2)} \qquad K_n^*(1,\theta) = \frac{1}{n+1}\left(K_0(1,\theta) + K_1(1,\theta) + \ldots + K_n(1,\theta)\right)$$

ist. Wir wollen dieses Resultat auf eine andere Weise ableiten, indem wir als wesentlich neues Hilfsmittel eine asymptotische Darstellung von $P_n(\cos\theta)$ benützen, welche bei großen n für alle Werte $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ gilt. Die asymptotische Darstellung für $\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ ergibt sich daraus unmittelbar vermittelst der Gleichung

$$\text{(3)} \qquad P_n(x) = (-1)^n P_n(-x).$$

In einer folgenden Mitteilung werden wir vermittelst dieser Methode auch zeigen, daß schon das Cesàrosche Mittel der Ordnung $k > \frac{1}{2}$ für absolut integrable Funktionen konvergiert[4a]).

§ 1.

Asymptotische Darstellung der Kugelfunktionen.

Nach Heine[5]) gilt für große Werte von n die asymptotische Darstellung

$$\text{(4)} \qquad P_n(\cos\theta) \sim \sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\theta}}\left[\left(1-\frac{1}{4n}\right)\cos\left((n+\tfrac{1}{2})\theta - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{8n}\operatorname{ctg}\theta\sin\left((n+\tfrac{1}{2})\right.\right.$$

wenn[6])

$$\text{(5)} \qquad \frac{1}{n^{\frac{1}{8}}} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$$

ist; der vernachlässigte Teil ist dabei von der Größenordnung $\frac{1}{n^2}$.

---

[4]) T. H. Gronwall, l. c. S. 243–251, vgl. auch A. Haar, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, Inaug.-Diss., Göttingen 1909, S. 27 und 36, abgedruckt in den Math. Ann. 69 (1910), S. 331–371, insbes. S. 350 und 366 und A. Haar, Über die Legendresche Reihe, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 32 (1911), S. 132–142, insbes. S. 133 und 139.

[4a]) Vgl. hierzu T. H. Gronwall, Über die Summierbarkeit der Reihen von Laplace und Legendre, Math. Ann. 75 (1914), S. 321–375.

[5]) Heine, Handbuch, S. 178.

[6]) Tatsächlich gilt die Darstellung auch noch, wenn $\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi - \frac{1}{n^{\frac{1}{8}}}$, doch ist diese Tatsache wegen (3) unwichtig.

Andererseits[7]) ist, wenn $J_0(\theta)$ die Besselsche Funktion nullter Ordnung ist,

$$\lim_{n\to\infty} P_n\left(\cos\frac{\theta}{n}\right) = J_0(\theta)$$

und es gilt[8]) für große Werte von θ die asymptotische Darstellung

$$J_0(\theta) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\theta}}\left[\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{8\theta}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Es liegt daher die Vermutung nahe, daß man für

$$o \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$$

eine asymptotische Darstellung

$$P_n(\cos\theta) \sim \sqrt{\frac{\theta}{\sin\theta}}\, J_0\left((n+\tfrac{1}{2})\theta\right)+\frac{1}{8n}\left(\operatorname{ctg}\theta-\frac{1}{\theta}\right)\sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\theta}}\sin\left((n+\tfrac{1}{2})\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

erhält. Die Richtigkeit von (8) für Werte θ, die (5) genügen, folgt durch unmittelbare Ausrechnung aus (4) und (7), und zwar bis auf Glieder der Ordnung $\frac{1}{n^2}$. Ist dagegen

$$0 \leqq \theta \leqq \frac{1}{n^{\frac{1}{8}}},$$

so ist der zweite Summand der rechten Seite von (8), der übrigens für $\theta = 0$ verschwindet, von der Größenordnung $\frac{1}{n^{\frac{25}{16}}}$; wir wollen jetzt untersuchen, bis zu welcher Größenordnung bei (9)

$$P_n(\cos\theta) \sim \sqrt{\frac{\theta}{\sin\theta}}\, J_0\left((n+\tfrac{1}{2})\theta\right)$$

gilt. Vorab sei bemerkt, daß für $\theta = 0$ linke und rechte Seite von (10) den Wert 1 besitzen. Bekanntlich genügt nur $P_n(\cos\theta)$ der Differentialgleichung

$$\frac{d}{d\theta}\left((\sin\theta)\frac{d\varphi}{d\theta}\right)+n(n+1)(\sin\theta)\varphi = 0.$$

Wir setzen

$$\varphi = P_n(\cos\theta) = \frac{u}{\sqrt{\sin\theta}};$$

dann ist

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+\left[\frac{1}{4\sin^2\theta}+(n+\tfrac{1}{2})^2\right]u = 0.$$

[7]) Heine, Handbuch, S. 184.

[8]) Funktionentafeln von Jahnke und Emde, S. 99; Nielsen, Handbuch der Zylinderfunktionen, S. 156.

Es sei nun

$$\theta = \frac{t}{n}, \quad \text{also} \quad o \leqq t \leqq n^{\frac{1}{3}}; \tag{14}$$

wir erhalten

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left[\frac{1}{4n^2 \sin^2 \frac{t}{n}} + \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^2\right] u = 0, \tag{15}$$

oder wenn

$$1 + \frac{1}{2n} = a \tag{16}$$

ist,

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left[\frac{1}{4t^2} + a^2\right] u = \left[\frac{1}{4t^2} - \frac{1}{4n^2 \sin^2 \frac{t}{n}}\right] u = \frac{h(t)}{n^2} u, \tag{17}$$

wobei

$$|h(t)| < M_1 \tag{18}$$

für alle nach (14) in Betracht kommenden Werte ist, wenn M_1 eine fest geeignet gewählte Zahl bezeichnet. Ersetzt man die rechte Seite von (17) durch 0, so hat die Differentialgleichung die partikulären Integrale[9])

$$u_1 = \sqrt{t}\, J_0(at), \qquad u_2 = \sqrt{t}\, Y_0(at), \tag{19}$$

wobei $Y_0(t)$ die zweite Besselsche Funktion nullter Ordnung ist und d Gleichung[10]) besteht:

$$J_0(at)\sqrt{t}\,\frac{d}{dt}\left(\sqrt{t}\, Y_0(at)\right) - Y_0(at)\sqrt{t}\,\frac{d}{dt}\left(\sqrt{t}\, J_0(at)\right) = \frac{2}{\pi}. \tag{20}$$

Faßt man nun in bekannter Weise auf der rechten Seite von (17) u e eine gegebene Funktion auf, so erhält man als ein partikuläres Integ der inhomogenen linearen Differentialgleichung (17)

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{\frac{t}{n}}\, J_0(at) + \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{t}}{n^2} Y_0(at) \int_0^t J_0(a\tau)\sqrt{\tau}\, h(\tau) u(\tau)\, d\tau \\ &\quad - \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{t}}{n^2} J_0(at) \int_0^t Y_0(a\tau)\sqrt{\tau}\, h(\tau) u(\tau)\, d\tau \\ &= \sqrt{\frac{t}{n}}\, J_0(at) + R_n(t). \end{aligned} \tag{21}$$

Damit nun gemäß (12)

$$u = \sqrt{\sin \frac{t}{n}}\, P_n\left(\cos \frac{t}{n}\right)$$

---

[9]) Vgl. etwa die Funktionentafeln von Jahnke und Emde, S. 166.

[10]) Nielsen, Handbuch der Zylinderfunktionen, S. 23, Formel (6), $\frac{dY_0(t)}{dt} = -Y_1$, $\frac{dJ_0}{dt} = -J_1$ ist.

muß sich die rechte Seite von (21) mit dem Faktor (-1) multi-
zieren, wenn t einen geschlossenen Umlauf um $t=0$ in der komplexen
ene ausführt; dabei ist $u(\tau)$ auf dieser rechten Seite durch (12) de-
ert, wird also bei diesem Umlaufe mit (-1) multipliziert. Dagegen
lert sich $J_0(at)$ dabei nicht, $Y_0(at)$ geht über in $Y_0(at)+4iJ_0(at)$.
raus folgt, durch direktes Ausrechnen, daß die rechte Seite von (21)
dem Umlaufe mit dem Faktor (-1) multipliziert wird. Da ferner
$t=0$ $R_n(t)$ von höherer als der Ordnung $\frac{1}{2}$ verschwindet, so läßt sich
durch (21) definierte Funktion $u(t)$ in der Form darstellen

$$u=\sqrt{\frac{t}{n}}(1+t\mathfrak{P}(t)),$$

$\mathfrak{P}(t)$ eine Potenzreihe mit ganzen positiven Potenzen von t ist. Da-
ist aber die Identität der beiden durch (21) und (12) definierten
sungen u von (17) bewiesen.

Um nun $|R_n(t)|$ abzuschätzen, benützen wir neben (7) die asympto-
he Darstellung*)

$$Y_0(at)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\left[\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{8t}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Wir beginnen mit einer vorläufigen Abschätzung und bezeichnen ent-
echend (18) mit M_i $(i=2,3,\ldots)$ endliche, von t und n unabhängige
ößen. Da[11])

$$P_n(\cos\theta)|\leqq 1$$

so ist nach (12) $|u|\leqq 1$; ferner ist nach (7) und (22)

$$|\sqrt{t}\,J_0(at)|<M_2;\qquad|\sqrt{t}\,Y_0(at)|<M_3.$$

o folgt aus (21)

$$|u|<\frac{M_2}{\sqrt{n}}+\frac{\pi}{2n^2}M_3\int_0^t M_2M_1\,d\tau+\frac{\pi}{2n^2}M_2\int_0^t M_3M_1\,d\tau$$

$$=\frac{M_2}{\sqrt{n}}+\frac{\pi}{n^2}M_1M_2M_3t,$$

bei $t\leqq n^{\frac{1}{3}}$ gilt. Daher ist

$$|u|<\frac{M_4}{\sqrt{n}}.$$

r benützen nun diesen verbesserten Wert von $|u|$ statt $|u|\leqq 1$ zur
schätzung von $|R_n(t)|$ und finden

$$|R_n(t)|<\frac{\pi}{n^{\frac{5}{2}}}M_1M_2M_3M_4t.$$

[11]) Heine, Handbuch, S. 18.

Es ist also

$$P_n(\cos\theta) = \sqrt{\frac{\theta}{\sin\theta}}\, J_0\left((n+\tfrac{1}{2})\theta\right) + \frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}\, R_n(n\theta) \tag{28}$$

$$= \sqrt{\frac{\theta}{\sin\theta}}\, J_0\left((n+\tfrac{1}{2})\theta\right) + \bar{R}_n(\theta),$$

mit

$$|\bar{R}_n(\theta)| < \frac{\pi}{n^{\frac{3}{2}}} M_1 M_2 M_3 M_4 \frac{\theta}{\sqrt{\sin\theta}} < \frac{M_5}{n^{\frac{25}{16}}}; \tag{29}$$

da

$$\theta \leqq \frac{1}{n^{\frac{1}{8}}},\ \sin\theta > \frac{\theta}{\frac{\pi}{2}}$$

gilt. Es ist also, wenn $o \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ ist, die Allgemeingültigkeit von (8) b
auf Glieder der Ordnung $\frac{1}{n^{\frac{25}{16}}}$ bewiesen. Speziell folgt aus (7) und (8
wenn $\nu \geqq 1$ und die Größen M_6, M_7 und M_8 von ν unabhängig sind,

$$|P_\nu(\cos\theta)| < \sqrt{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{\pi(\nu+\frac{1}{2})\theta}}\, M_6 + \frac{M_7}{\nu^{\frac{25}{16}}} < \frac{M_8}{\sqrt{\nu\,\theta}}. \tag{30}$$

§ 2.

Beweis des Hauptsatzes.

Es ist[12])

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{2\nu+1}{2} P_\nu(\cos\theta) = -\frac{n+1}{2}\, \frac{P_{n+1}(\cos\theta) - P_n(\cos\theta)}{1-\cos\theta}, \tag{31}$$

also nach (2)

$$K_n^*(1,\theta) = \frac{1}{2(n+1)}\Big[-(P_1(\cos\theta) - P_0(\cos\theta)) \tag{32}$$

$$-2(P_2(\cos\theta) - P_1(\cos\theta)) \ldots - n(P_n(\cos\theta) - P_{n-1}(\cos\theta))$$

$$-(n+1)(P_{n+1}(\cos\theta) - P_n(\cos\theta))\Big]\, \frac{1}{1-\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{2(n+1)}\, \frac{P_0(\cos\theta) + P_1(\cos\theta) + \ldots + P_n(\cos\theta) - (n+1)P_{n+1}(c}{1-\cos\theta}$$

Man hat nach den Ausführungen der Einleitung zu zeigen, daß

$$\int_0^\pi |K_n^*(1,\theta)| \sin\theta\, d\theta < M_9 \tag{33}$$

[12]) Haar, l. c. [4]), S. 144; Christoffel, Über die Gaußische Quadratur, Jour
für die reine und angewandte Math. 55 (1858), S. 73.

lt, wenn M_9 eine geeignet gewählte, feste Größe ist. Wir setzen

4) $$\int_0^{\pi} |K_n^*(1,\theta)| \sin\theta\, d\theta = \int_0^{n^{-\frac{1}{8}}} + \int_{n^{-\frac{1}{8}}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = S_1 + S_2 + S_3.$$

Am einfachsten ist S_3 abzuschätzen. Es ist nämlich für $\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ ets $|1 - \cos\theta| \geqq 1$ und, da $|P_\nu(\cos\theta)| \leqq 1$ ist,

5) $$S_3 < \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{n+n+1}{2(n+1)}\, d\theta < \frac{\pi}{2}.$$

Bei der Abschätzung von S_2 und S_3 wird

6) $$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} < \frac{\pi}{\theta}$$

it sehr kleinem θ sehr groß. Nun ist aber

7) $$S_2 < \frac{1}{2(n+1)} \int_{n^{-\frac{1}{8}}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{2\pi}{\theta} + \frac{\pi}{\theta}\left|\sum_{\nu=2}^{n} P_\nu(\cos\theta)\right| + (n+1)|P_{n+1}(\cos\theta)|\frac{\pi}{\theta}\right] d\theta$$

ıd nach (30)

8) $$\left|\sum_{\nu=2}^{n} P_\nu(\cos\theta)\right| < \frac{M_8}{\sqrt{\theta}} \sum_{\nu=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{\nu}} < \frac{M_8}{\sqrt{\theta}} \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}} < \frac{M_8}{\sqrt{\theta}} \frac{\sqrt{n}}{2};$$

$$(n+1)|P_{n+1}(\cos\theta)| < \frac{(n+1)}{\sqrt{n+1}} \frac{M_8}{\sqrt{\theta}},$$

so

9) $$S_2 < \int_{n^{-\frac{1}{8}}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{2\pi n^{\frac{1}{8}}}{2(n+1)} + \frac{\pi M_8 n^{\frac{11}{16}}}{4(n+1)} + \frac{\pi M_8 n^{\frac{3}{16}}}{2\sqrt{n+1}}\right] d\theta < M_{10}.$$

s wurde dabei $\frac{1}{\theta}$ durch $n^{\frac{1}{8}}$ ersetzt, und da das Integral mit wachsenm n nach 0 konvergiert, folgt gewiß, daß es kleiner als eine feste ıhl M_{10} ist.

Zur Abschätzung von S_1 benützen wir (28) und (29), wobei der eitrag[13]) der absoluten Beträge der Größen $\frac{R_\nu(\nu\theta)}{\sqrt{\sin\theta}}$ kleiner ist als

11 $\int_0^{n^{-\frac{1}{8}}} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta}} < M_{12}$, da der Ausdruck mit wachsendem n nach 0 konvergiert.

[13]) Für $n = 0$ gilt zwar (29) nicht; doch stört das entsprechende Glied nicht, es für $\theta = 0$ von der ersten Ordnung verschwindet.

Es ist ferner

$$(40)\qquad J_0(\theta)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\theta\sin\varphi)\,d\varphi,$$

$$(41)\qquad \sum_{\nu=0}^{n}\cos(\nu z+\alpha)=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}z\right)\cos\left(\alpha+\frac{n}{2}z\right)}{\sin\frac{z}{2}},$$

daher

$$(42)\qquad \sum_{\nu=0}^{n}J_0\left(\left(\nu+\tfrac{1}{2}\right)\theta\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{\nu=0}^{n}\cos\left(\left(\nu+\tfrac{1}{2}\right)\theta\sin\varphi\right)d\varphi$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\sin\varphi\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}\theta\sin\varphi\right)}{\sin\left(\frac{\theta\sin\varphi}{2}\right)}d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left((n+1)\theta\sin\varphi\right)}{\sin\left(\frac{\theta\sin\varphi}{2}\right)}d\varphi.$$

Man hat daher

$$(43)\qquad S_1<\frac{1}{2(n+1)}\int_0^{n^{-\frac{1}{8}}}\sqrt{\frac{\theta}{\sin\theta}}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left((n+1)\theta\sin\varphi\right)}{\sin\left(\frac{\theta\sin\varphi}{2}\right)}d\varphi\right.$$

$$\left.-(n+1)J_0\left(\left(n+\tfrac{3}{2}\right)\theta\right)\right|\frac{\pi}{\theta}d\theta+M_{12},$$

oder wenn $t=n\theta$ gesetzt wird,

$$(44)\qquad |S_1|<\tfrac{1}{2}\int_0^{n^{\frac{7}{8}}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)t\sin\varphi\right)}{(n+1)\sin\left(\frac{t\sin\varphi}{2n}\right)}d\varphi-J_0\left(\left(1+\frac{3}{2n}\right)t\right)\right|\frac{\pi}{t}dt+$$

Nun ist

$$(45)\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)t\sin\varphi\right)}{(n+1)\sin\left(\frac{t\sin\varphi}{2n}\right)}d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)t\sin\varphi\right)}{(n+1)\frac{t\sin\varphi}{2n}\left(1-\frac{t^2\sin^2\varphi}{6\cdot4n^2}+\ldots\right)}d\varphi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)t\sin\varphi\right)}{\frac{n+1}{2n}t\sin\varphi}d\varphi+\frac{t}{n^2}k(t),$$

wobei $k(t)<M_{13}$ gilt, sowie

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)t\sin\varphi\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\varphi}d\varphi=\frac{2}{\pi}\int_0^{t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)t\sin\varphi\right)d\varphi=\int_0^{t}J_0\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)t\right)$$

$$S_1 < \tfrac{1}{2}\int_0^{n^{\frac{1}{8}}} \sqrt{\tfrac{\pi}{2}} \left| \frac{1}{t}\int_0^t J_0\left(\left(1+\tfrac{1}{n}\right)t\right)dt - J_0\left(\left(1+\tfrac{3}{2n}\right)t\right)\right| \frac{\pi}{t}\,dt$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int_0^{n^{\frac{1}{8}}} \sqrt{\tfrac{\pi}{2}} \left| \frac{M_{13}}{n^2}t\right| \frac{\pi}{t}\,dt + M_{12}.$$

Entwickelt man nun $\frac{1}{t}\int_0^t J\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)t\right)dt - J_0\left(\left(1+\frac{3}{2n}\right)t\right)$ nach Po-

nzen von t, so beginnt dieses mit t^1, so daß, wenn m eine feste Zahl ist,

$$\tfrac{1}{2}\int_0^m \sqrt{\tfrac{\pi}{2}} \left| \frac{1}{t}\int_0^t J_0\left(\left(1+\tfrac{1}{n}\right)t\right)dt - J_0\left(\left(1+\tfrac{3}{2n}\right)t\right)\right| \frac{\pi}{t}\,dt$$

$$+ \frac{\pi}{2n^2}\int_0^{n^{\frac{1}{8}}} \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\, M_{13}\,dt + M_{12} < M_{14}$$

Da nun

$$\left|J_0\left(\left(1+\tfrac{1}{n}\right)t\right)\right| < \frac{M_{15}}{\sqrt{t}}, \quad \left|J_0\left(\left(1+\tfrac{3}{2n}\right)t\right)\right| < \frac{M_{16}}{\sqrt{t}},$$

$$\frac{1}{t}\left|\int_0^t J_0\left(\left(1+\tfrac{1}{n}\right)t\right)dt\right| < \frac{M_{17}}{\sqrt{t}}$$

so ist

$$\tfrac{1}{2}\int_m^{n^{\frac{1}{8}}} \sqrt{\tfrac{\pi}{2}} \left| \frac{1}{t}\int_0^t J_0\left(\left(1+\tfrac{1}{n}\right)t\right)dt - J_0\left(\left(1+\tfrac{3}{2n}\right)t\right)\right| \frac{\pi}{t}\,dt$$

$$< \tfrac{1}{2}\int_m^{n^{\frac{1}{8}}} \sqrt{\tfrac{\pi}{2}} \left| \frac{M_{17}}{t^{\frac{3}{2}}} + \frac{M_{16}}{t^{\frac{3}{2}}}\right| \pi\,dt < M_{18},$$

$$S_1 < M_{14} + M_{18}.$$

Aus (35), (39) und (49) folgt also die zu beweisende Gleichung (33).

(Eingegangen am 15. März 1919.)

Untersuchungen über zweidimensionale reguläre Variationsprobleme.

Zweite Abhandlung.

Das einfachste Problem bei fester und bei freier Begrenzung.

Von

Leon Lichtenstein in Berlin.

Es sei T ein von geschlossenen, analytischen und regulären Linie begrenztes Gebiet in der Ebene der Variablen x und y, das einfach od mehrfach zusammenhängend sein kann. Die Gesamtberandung von T heiße Es sei $f(x, y, z, p, q)$ eine für alle x, y, z in einem dreidimensionale Gebiete $\mathfrak{R}$ und für alle reellen p und q erklärte reguläre analytisc Funktion. Betrachten wir das Doppelintegral

$$(1) \qquad J = \int_T f(x, y, z, p, q)\, dx\, dy, \qquad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Es sei $z(x, y)$ eine in T und auf S erklärte reguläre analytische Funktio die so beschaffen ist, daß die Fläche $x, y, z(x, y)$ ganz im Innern von verläuft. Wir nehmen an, daß $z(x, y)$ der Lagrangeschen Differenti gleichung

$$(2) \qquad f_{pp}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2f_{pq}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + f_{qq}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + f_{pz}\frac{\partial z}{\partial x} + f_{qz}\frac{\partial z}{\partial y} + f_{px} + f_{qy} - f_z = 0$$

und der Bedingung

$$(3) \qquad f_{pp}f_{qq} - f_{pq}^2 > 0$$

genügt. Die Funktion $z(x, y)$ erfüllt damit die erste und die zwe notwendige Bedingung für das Eintreten eines Extremums bei fester R grenzung.

Es sei

$$(4) \qquad \Lambda(\zeta) = \frac{\partial}{\partial x}(f_{pp}\zeta_x + f_{pq}\zeta_y) + \frac{\partial}{\partial y}(f_{pq}\zeta_x + f_{qq}\zeta_y) + \zeta\left(\frac{\partial}{\partial x}f_{zp} + \frac{\partial}{\partial y}f_{zq} - f\right.$$

$$\zeta_x = \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \qquad \zeta_y = \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

zu (1) gehörige Jacobische Differentialgleichung[1]). Wir schreiben zur ürzung

$$\Lambda(\zeta) = \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial \zeta}{\partial x} + b\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(b\frac{\partial \zeta}{\partial x} + c\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) + k\zeta = 0.$$

Im allgemeinen wird das Produkt ak in T sowohl positive als auch ative Werte annehmen.

Es sei T_1 irgendein von geschlossenen analytischen und regulären rven begrenztes Gebiet im Innern von T. Seine Berandung heiße S_1. ranntlich lautet die dritte für das Eintreten eines Extremums notdige Bedingung so:

Außer der Funktion $\zeta(x, y) \equiv 0$ gibt es keine in T_1 und auf S_1 ige, in T_1 reguläre[2]) Lösung der Differentialgleichung (5), die auf S_1 schwindet[3]). Diese Bedingung stellt kein für die Anwendungen geetes Kriterium dar.

Betrachten wir die zu dem ersten Randwertproblem gehörigen Eigente der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(b\frac{\partial u}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \lambda ku = 0.$$

nmt ak in T sowohl positive als auch negative Werte an, so gibt es ndlich viele positive Eigenwerte $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots$ sowie unendlich viele ative Eigenwerte $\lambda_{-1} \geqq \lambda_{-2} \geqq \ldots$

In einer vor zwei Jahren veröffentlichten größeren Arbeit habe ich ch ziemlich weitläufige Überlegungen gezeigt, daß die vorhin genannte obische Bedingung der folgenden sehr einfachen Aussage äquivalent ist.

Der kleinste positive Eigenwert der Differentialgleichung (6) *muß ndestens gleich* 1 *sein,*

$$\lambda_1 \geqq 1.^{4})$$

In dem besonderen Falle der Minimalflächen ist dieses Kriterium langer Zeit schon von Herrn H. A. Schwarz in einer berühmten

---

[1]) Hier sind $f_{pp}, f_{pq}, \ldots$ offenbar als bekannte Funktionen von x und y aufssen. Es ist z. B. $f_{pp} = f_{pp}\left(x, y, z(x, y), \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}\right)$.

[2]) Zur Vereinfachung nennen wir eine nebst ihren partiellen Ableitungen erster zweiter Ordnung stetige Lösung regulär. Eine Verwechselung mit „analytisch regulär" ist nicht zu befürchten.

[3]) Vgl. z. B. O. Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung, Leipzig 1909, S. 678.

[4]) Vgl. L. Lichtenstein, Untersuchungen über zweidimensionale reguläre Vaionsprobleme. I. Das einfachste Problem bei fester Begrenzung. Jacobische ingung und die Existenz des Feldes. Verzweigung der Extremalflächen. Monatse für Math. und Physik 28 (1917), S. 3—51. Diese Arbeit wird in dem folgenden die erste Abhandlung bezeichnet.

Abhandlung aufgestellt und bewiesen worden. Vgl. H. A. Schwarz, „Übe ein die Flächen kleinsten Inhalts betreffendes Problem der Variations rechnung", Acta Societatis Scientiarum Fennicae, Bd. 15 (1885), S. 31 bis 362; Gesammelte Abhandlungen, Bd. I, S. 223—269.

Ist $\lambda_1 > 1$, so läßt sich, wie ich weiter gezeigt habe, die Fläch $z = z(x, y)$ in ein Feld von Extremalen einbetten. Es liegt darum, wen die Bedingung (3) für alle p und q erfüllt ist, (für $a > 0$) ein starke Minimum vor[5]).

In dem ersten Kapitel dieser Abhandlung wird zunächst (§ 1) unt Zuhilfenahme gewisser Ergebnisse einer von mir vor kurzem veröffen lichten Abhandlung[6]) in der einfachsten Weise ein neuer Ausdruck fü die zweite Variation des Integrals J abgeleitet[7]). Aus diesem ergibt sic fast unmittelbar die notwendige Bedingung $\lambda_1 \geqq 1$. Der zweite Paragrap bringt einen vereinfachten Beweis für die Existenz des Feldes ($\lambda_1 > 1$ Der Hauptfall $\lambda_1 > 1$ ist damit erledigt.

Es sei jetzt $\lambda_1 = 1$. In diesem Falle sind höhere Variationen, zunäch die dritte und die vierte, heranzuziehen. Es gelingt, eine Kette explizi angebbarer Kriterien aufzustellen, die teils notwendig, teils hinreiche sind und beliebig weit fortgesetzt werden können. Ist eine der hinreiche den Bedingungen erfüllt, so liegt zumindest ein schwaches Minimum vo

Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit dem Extremum des Int grals (1) bei freier Begrenzung. Das Analogon zu der Jacobischen B dingung beim festen Rand war in diesem Falle, soweit ich sehe, bis jet noch nicht angegeben worden. Die dritte notwendige Bedingung wird dieser Arbeit in der folgenden Form gewonnen.

Es sei $\bar{q}$ eine in $T + S$ analytische und reguläre, durchaus negati Funktion. Betrachten wir die erweiterte Jacobische Differentialgleichu

$$(6) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(b\frac{\partial u}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \bar{q}u + \lambda(k - \bar{q})u = 0$$

und die Randbedingung

$$(7) \qquad \left(b\frac{dx}{ds} - a\frac{dy}{ds}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(c\frac{dx}{ds} - b\frac{dy}{ds}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \lambda h u = 0$$

$$h = -\left(f_{ps}\frac{dy}{ds} - f_{qs}\frac{dx}{ds}\right.$$

---

[5]) Sind alle Eigenwerte negativ, so ist $\lambda_1 = +\infty$ anzunehmen.

[6]) Vgl. L. Lichtenstein, Zur Analysis der unendlich vielen Variablen. (Zwe Abhandlung) Reihenentwicklungen nach Eigenfunktionen linearer partieller Differenti gleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Diese Zeitschrift 3 (191 S. 127—160.

[7]) Man kann übrigens diese Sätze entbehren und sich auf ganz elementare Hil mittel beschränken, wenn man die Betrachtung ein wenig modifiziert. Vgl. die B merkung am Schluß des ersten Paragraphen.

Damit das Minimum eintreten kann, muß der kleinste positive *enwert* λ_1 *mindestens gleich* 1 *sein. Ist* $\lambda_1 > 1$, *so liegt starkes Mini-* *m vor.*

Das methodisch neue dieser wie der ersten Abhandlung beruht zu- *hst* in der systematischen Verwendung der Methoden der Theorie der *ndwertprobleme.* Ein weiterer wesentlicher Gedanke bildet die Ent- *klung* der Variation ζ in eine unendliche Reihe, die nach Funktionen *es* geeigneten Orthogonalsystems fortschreitet.

Das in dieser Arbeit eingeschlagene Verfahren läßt sich weiter aus- *ien* und in analoger Weise auf verschiedene höhere Variationsprobleme *venden*[8]).

Erstes Kapitel.

Das einfachste Problem bei fester Begrenzung.

§ 1.

Es sei $\zeta(x, y)$ irgendeine in T und auf S stetige, auf S verschwin- *de* Funktion, die in $T+S$ abteilungsweise stetige partielle Ableitungen *er* Ordnung hat. Es sei ε_0 eine so kleine positive Zahl, daß für alle $\leqq \varepsilon_0$ die Fläche $x, y, z(x, y) + \varepsilon\zeta(x, y)$ ganz im Innern von $\mathfrak{R}$ liegt. *r* setzen

$$\Delta J = \int_T [f(x, y, z+\varepsilon\zeta, z_x+\varepsilon\zeta_x, z_y+\varepsilon\zeta_y) - f(x, y, z, z_x, z_y)]\, dx\, dy$$

$$= \varepsilon J_1 + \varepsilon^2 J_2 + \ldots \qquad \left(z_x = \frac{\partial z}{\partial x},\quad z_y = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Es gilt

$$J_1 = \int_T \left(f_p \frac{\partial\zeta}{\partial x} + f_q \frac{\partial\zeta}{\partial y} + f_z\zeta\right) dx\, dy = 0, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{1}{2}\int_T \left[f_{pp}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 + 2f_{pq}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y} + f_{qq}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2 + 2f_{pz}\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial x} + 2f_{qz}\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial y} + f_{zz}\zeta^2\right] dx\, dy;$$

ür man nach einer teilweisen Integration auch schreiben kann:

---

[8]) In einer in den Göttinger Nachrichten im Erscheinen begriffenen Arbeit habe das gleiche Verfahren auf das einfachste Problem bei festem und bei freiem Rand eindimensionalen Gebiete angewandt. Vgl. L. Lichtenstein, Zur Variations- *nnung.* Erste Mitteilung. Gött. Nachrichten 1919. Der größeren Einfachheit der *gabe* entsprechend, treten in jener Arbeit die Grundgedanken meiner Methode *nders* klar hervor.

$$J_2 = \tfrac{1}{2}\int_T \Big\{ f_{pp}\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)^2 + 2 f_{pq}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y} + f_{qq}\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)^2 - \Big[\frac{\partial}{\partial x}f_{zp} + \frac{\partial}{\partial y}f_{zq} - f_{zz}\Big]\zeta^2\Big\} d$$

(4)

$$= \tfrac{1}{2}\int_T \Big[a\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)^2 + 2b\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y} + c\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)^2 - k\zeta^2\Big] dx\,dy.\ ^{9})$$

Nach Voraussetzung ist in T und auf $S \ldots ac - b^2 > 0$. Wir nehme an, daß in $T + S \ldots a > 0$ ist.

Betrachten wir die partielle Differentialgleichung vom elliptische Typus

$$(5) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\Big(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(b\frac{\partial u}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial y}\Big) + \lambda k u = 0, \qquad ac - b^2 >$$

Es mögen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots; \varphi_{-1}, \varphi_{-2}, \ldots$ ihre entsprechend zu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ $\lambda_{-1}, \lambda_{-2}, \ldots$ gehörigen (auf S verschwindenden) Eigenfunktionen bezeichne Wir denken uns diese den Beziehungen

$$\int_T k\varphi_j\varphi_l\,dx\,dy = 0, \qquad (j \neq l)$$

$$\int_T k\varphi_j^2\,dx\,dy = \frac{\lambda_j}{|\lambda_j|}$$

gemäß normiert. Wie ich neuerdings bewiesen habe, gelten die beide Formeln

$$(6) \qquad \int_T k\zeta^2\,dx\,dy = \sum \frac{\lambda_j}{|\lambda_j|}\Big(\int_T k\zeta\varphi_j\,dx\,dy\Big)^2,$$

$$(7) \qquad \int_T \Big\{ a\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)^2 + 2b\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y} + c\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)^2\Big\} dx\,dy = \sum |\lambda_j|\Big(\int_T k\zeta\varphi_j\,dx\,dy\Big)^2 \ ^{10}$$

Demnach ist

$$(8) \qquad J_2 = \tfrac{1}{2}\sum |\lambda_j|\Big(1 - \frac{1}{\lambda_j}\Big)\Big(\int_T k\zeta\varphi_j\,dx\,dy\Big)^2.$$

Es sei für alle (x, y) in $T + S$

$$(9) \qquad |\zeta|,\ |D_1\zeta| < M.$$

Die vollständige Variation ΔJ kann in der Form

$$\Delta J = \varepsilon^2 J_2 + \frac{\varepsilon^3}{3!}\int_T [\hat{f}_{ppp}\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)^3 + 3\hat{f}_{ppq}\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)^2\frac{\partial\zeta}{\partial y} + \ldots + \hat{f}_{zzz}\zeta^3]\,dx\,dy = \varepsilon^2(J_2 +$$

(10)

$$\hat{f}_{ppp} = f_{ppp}\Big(x, y, z + \theta\varepsilon\zeta, \quad \frac{\partial z}{\partial x} + \theta\varepsilon\frac{\partial\zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} + \theta\varepsilon\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big), \quad 0 < \theta <$$

---

[9]) Unter $\frac{\partial}{\partial x}f_{zp}$, $\frac{\partial}{\partial y}f_{zq}$ ist ausführlicher $\frac{\partial}{\partial x}f_{zp}\big(x, y, z(x, y), z_x(x, y), z_y(x, y)\big)$, zu verstehen.

[10]) Vgl. loc. cit. [6]) S. 132–143 sowie S. 150–151. An der zitierten Stelle sind n λ_j $(j = 1, 2, \ldots)$ die irgendwie einfach geordneten Eigenwerte, mit φ_j die zugehörig Eigenfunktionen bezeichnet worden. Die positiven Eigenwerte heißen dort $\lambda^{(1)} \leqq \lambda^{(2)} \leqq$

estellt werden. Es gilt nun für alle $|\varepsilon| \leqq \varepsilon_0$ und alle der Ungleich-
(9) genügenden Werte von ζ

$$|\hat{f}_{ppp}| < \alpha_1,$$

r α_1, wie später unter $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$ bestimmte Konstante verstanden.
(9) und (11) folgt

$$\int_T \hat{f}_{ppp} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^3 dx\,dy \leqq \alpha_2 \int_T \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 dx\,dy.$$

findet in ähnlicher Weise z. B.

$$\int_T \hat{f}_{pzz} \zeta^2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx\,dy \leqq \alpha_3 \int_T \zeta^2\, dx\,dy,$$

$$\int_T \hat{f}_{pqz} \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} dx\,dy \leqq \alpha_4 \int_T \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} dx\,dy \leqq \frac{\alpha_4}{2} \int_T \left[\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy$$

Es gilt demnach

$$|J_3| \leqq \alpha_5 \int_T \left[\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2 + \zeta^2\right] dx\,dy.$$

h bekannten Sätzen ist

$$\int_T \zeta^2\, dx\,dy \leqq \alpha_6 \int_T \left[\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy \ ^{11}),$$

nach

$$|J_3| \leqq \alpha_7 \int_T \left[\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy.$$

$$a\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + 2b \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{a}\left\{\left(a \frac{\partial \zeta}{\partial x} + b \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2 + (ac - b^2)\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2\right\}$$

wegen $ac - b^2 > 0$

$$\left.\right)^2 \leqq \frac{a}{ac-b^2}\left\{a\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + 2b \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2\right\} \leqq \alpha_8 \left\{a\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + 2b \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2\right\}.$$

---

ugehörigen Eigenfunktionen $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots$ Zur Vereinfachung werden die partiellen itungen erster und zweiter Ordnung einer Funktion F, wenn es auf die Richtung, der differentiiert wird, nicht ankommt, mit $D_1 F$ und $D_2 F$ bezeichnet.

11) Nach S. Zaremba, Bulletin de l'Acad. de Sc. de Cracovie 1909, S. 197–204, 3 u. ff. kann man für α_6 das Quadrat des Durchmessers von T setzen. Die obere anke von $\frac{1}{\alpha_6}$ ist übrigens gleich dem kleinsten (positiven) Eigenwert der Diffe-algleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu u = 0$ im Gebiete T, der zu dem ersten Randwert-iem gehört.

Ebenso ist

$$\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 \leqq \alpha_9\left\{a\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\right\}. \tag{20}$$

Wir finden darum

$$|\hat{J}_3| \leqq \alpha_{10}\int_T\left\{a\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy. \tag{21}$$

Es möge jetzt k in T positive Werte annehmen. Dann gibt es gewi unendlich viele positive Eigenwerte.

1. Es sei

$$\lambda_1 < 1. \tag{22}$$

Für $\zeta = \varphi_1$ ist nach (8)

$$J_2 = \tfrac{1}{2}(\lambda_1 - 1) < 0. \tag{23}$$

Die zweite Variation kann negative Werte annehmen. Wegen (10 (23), (21) und (7) ist für hinreichend kleine Werte von $|\varepsilon|$

$$\Delta J < \frac{\varepsilon^2}{2}(\lambda_1 - 1 + 2|\varepsilon|\alpha_{10}\lambda_1) < 0. \tag{24}$$

Damit ein Minimum eintreten kann, muß demnach

$$\lambda_1 \geqq 1 \tag{25}$$

sein.

2. Es sei

$$\lambda_1 > 1. \tag{26}$$

Aus (8) folgt, wie man leicht sieht,

$$\begin{aligned} J_2 &\geqq \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right)\sum_{j>0}\lambda_j\left(\int_T k\zeta\varphi_j\,dx\,dy\right)^2 + \tfrac{1}{2}\sum_{j<0}|\lambda_i|\left(\int_T k\zeta\varphi_j\,dx\,dy\right)^2 \\ &\geqq \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right)\sum|\lambda_j|\left(\int_T k\zeta\varphi_j\,dx\,dy\right)^2, \end{aligned} \tag{27}$$

demnach

$$J_2 \geqq \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right)\int_T\left\{a\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy \geqq 0. \tag{28}$$

Die zweite Variation ist nicht negativ und verschwindet nur für $\zeta \equiv$

Wir finden ferner wegen (10), (28) und (21)

$$\Delta J \geqq \frac{\varepsilon^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_1} - 2|\varepsilon|\alpha_{10}\right)\int_T\left\{a\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy \geqq \tag{29}$$

Die Gesamtvariation des Integrals J ist demnach für hinreichend kleine We von $|\varepsilon|$ *nicht negativ und verschwindet nur für* $\zeta \equiv 0$. *Augenscheinl liegt im vorliegenden Falle mindestens ein schwaches Minimum vor.*

Ist in $T+S$ durchweg $ak \leqq 0$ und in mindestens einem Punkte in T < 0, so sind alle Eigenwerte negativ. In diesem Falle sowie für $k \equiv 0$ ist

$$J_2 \geqq \tfrac{1}{2}\int_T \left\{a\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2\right\} dx\,dy \geqq 0.$$

Diese Formel folgt aus der Formel (28) für $\lambda_1 = +\infty$. Wir wollen um sagen, daß jetzt der k einste positive Eigenwert $\lambda_1 = +\infty$ ist. ch jetzt liegt mindestens ein schwaches Minimum vor.

3. Ist $\lambda_1 = 1$, so ist

$$J_2 = \tfrac{1}{2}\sum_{j=1} |\lambda_j|\left(1 - \frac{1}{\lambda_j}\right)\left(\int_T k\zeta\varphi_j\,dx\,dy\right)^2.$$

Dieser Ausdruck ist nicht negativ und verschwindet nur für $\zeta = \varphi_1$. er das Vorzeichen der Gesamtvariation läßt sich erst nach einer ein- enden weiteren Diskussion etwas bestimmtes sagen (vgl. § 4).

Es sei T_1 irgendein von geschlossenen analytischen und regulären rven S_1 begrenztes Gebiet ganz im Innern von T. Ist $\lambda_1 \geqq 1$, so hat h bekannten Sätzen die Jacobische Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(b\frac{\partial u}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial y}\right) + ku = 0$$

ne in T_1 und auf S_1 stetige, auf S_1 verschwindende, in T_1 reguläre ung[12]).

Die für das Eintreten eines Extremums notwendige Bedingung

$$\lambda_1 \geqq 1$$

demnach der Jacobischen Bedingung in der üblichen Fassung voll- nmen äquivalent.

Die in dem vorstehenden abgeleitete Form der Jacobischen Be- gung ist nicht die einzige ihrer Art. Man könnte, wenn $\bar{q}$ irgendeine lytische und reguläre, durchweg negative Funktion bezeichnet, ebenso von der zweiten Variation in der Gestalt

$$\int_T \left\{a\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y^2}\right) - \bar{q}\zeta^2 - (k-\bar{q})\zeta^2\right\} dx\,dy$$

dementsprechend von der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(b\frac{\partial u}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \bar{q}u + \lambda(k-\bar{q})u = 0$$

[12]) Es sei etwa $\hat{\zeta}$ eine Lösung dieser Art. Wir setzen $\bar{\zeta} = \hat{\zeta}$ in T_1, $\bar{\zeta} = 0$ in T_1 und finden leicht, daß für $\zeta = \bar{\zeta}$ die zweite Variation J_2 verschwindet. Dies ıber den Sätzen des Textes zufolge nicht möglich.

ausgehen. Die Jacobische Bedingung erscheint jetzt in der Form: *D*
kleinste positive Eigenwert der Differentialgleichung (5*) *muß mindeste*
gleich 1 *sein.* Wird $|\bar{q}|$ so groß gewählt, daß in T und auf S die Funk
tion $k-\bar{q}>0$ ist, so sind alle Eigenwerte von (5*) positiv. D
Entwicklungssätze, auf die sich unsere Betrachtungen stützen, lassen sic
dann ganz elementar ableiten[13]). Die in der Wahl von $\bar{q}$ liegende Willk
ist offenbar ein Nachteil dieser neuen Form der Jacobischen Bedingun

§ 2.

Es möge jetzt $\lambda_1 > 1$ sein. Wie ich in dem zweiten Kapitel d
ersten Abhandlung bewiesen habe, läßt sich die Fläche $z = z(x, y)$
ein Feld von Extremalflächen einbetten. Dieser Beweis soll im folgend
in einer vereinfachten, übersichtlicheren Gestalt wiedergegeben werden[1]

Es sei $x, y, \bar{z}(x, y) \equiv z(x, y) + \varepsilon\zeta(x, y)$ eine ganz im Innern v
$\mathfrak{R}$ gelegene Extremalfläche in der Nachbarschaft der Fläche $x, y, z(x, y$
Wir nehmen an, daß $\bar{z}(x, y)$ in $T+S$ stetige Ableitungen erster u
zweiter Ordnung hat.

Wir setzen zur Abkürzung

$$f\left(x, y, \bar{z}, \frac{\partial\bar{z}}{\partial x}, \frac{\partial\bar{z}}{\partial y}\right) = \bar{f}, \quad f_z\left(x, y, \bar{z}, \frac{\partial\bar{z}}{\partial x}, \frac{\partial\bar{z}}{\partial y}\right) = \bar{f}_z, \ldots . \tag{34}$$

Es gilt [vgl. die Fußnote [9])]

$$\frac{\partial}{\partial x}(\bar{f}_p - f_p) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{f}_q - f_q) - (\bar{f}_z - f_z) = 0. \tag{35}$$

Durch Entwicklung nach Potenzen von ε gewinnt man hieraus für ζ d
partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \Lambda(\zeta) &\equiv \frac{\partial}{\partial x}(f_{pp}\zeta_x + f_{pq}\zeta_y) + \frac{\partial}{\partial y}(f_{pq}\zeta_x + f_{qq}\zeta_y) + \zeta\left(\frac{\partial}{\partial x}f_{pz} + \frac{\partial}{\partial y}f_{qz} - f\right. \\ &\equiv \frac{\partial}{\partial x}(a\zeta_x + b\zeta\ ) + \frac{\partial}{\partial y}(b\zeta_x + c\zeta_y) + k\zeta = \varepsilon\Phi(x, y, \zeta, \zeta_x, \zeta_y, \zeta_{xx}, \zeta_{xy}, \end{aligned} \tag{36}$$

unter Φ eine für alle $(x, y, z(x, y) + \varepsilon\zeta(x, y))$ in $\mathfrak{R}$ und für alle reell
Werte von $\zeta_x, \zeta_y, \zeta_{xx}, \zeta_{xy}, \zeta_{yy}$ erklärte analytische und reguläre Funkti
ihrer sechs letzten Argumente verstanden; Φ hängt auch von ε analytis
ab. Die Taylorsche Entwicklung von Φ ist von der Form

---

[13]) Vgl. loc. cit. [5]), S. 132–136.

[14]) Diese Betrachtungen stellen eine Verallgemeinerung eines von Herrn K
und unabhängig von ihm von Herrn Müntz geführten Existenzbeweises. Vgl. A. K
Über Minimalflächen, deren Randkurven wenig von ebenen Kurven abweichen, Berli
Abhandlungen, Math. Phys. Kl. Anhang, 1909; Ch. H. Müntz, Zum Randwertprobl
der partiellen Differentialgleichung der Minimalflächen, Journal für Mathem
139 (1910), S. 5–32.

$$\Phi = \sum \varepsilon^{l_1} \zeta^{l_2} \zeta_x^{l_3} \dots \zeta_{yy}^{l_7} \Phi_{l_1 \dots l_7}(x, y)$$
$$(l_2 + \dots + l_7 = l \geqq 2,\ l_1 = l - 2).$$

Die partiellen Ableitungen ζ_{xx}, ζ_{xy}, ζ_{yy} kommen übrigens in Φ nur ar vor. Es gilt ferner

$$ac - b^2 > 0.$$

Es sei $\chi(s)$ eine auf S erklärte stetige Folge von Werten. Wir men an, daß $\chi(s)$ stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung hat l überdies Beziehungen von der Form

$$|\chi(s)|,\ \left|\frac{d\chi(s)}{ds}\right|,\ \left|\frac{d^2\chi(s)}{ds^2}\right| < M,$$

$$\left|\frac{d^2}{ds^2}\chi(s+h) - \frac{d^2}{ds^2}\chi(s)\right| < M|h|^\mu,\quad 0 < \mu < 1\ (M \text{ konstant})$$

ügt. Wir beweisen, daß es für alle dem absoluten Betrage nach hin- hend kleinen Werte von ε, etwa

$$|\varepsilon| < \varepsilon^*$$

e in $T + S$ reguläre Lösung $\zeta(x, y)$ der Differentialgleichung (36) gibt, auf S gleich $\chi(s)$ ist. Offenbar stellt

$$x, y, \bar{z}(x, y) \equiv z(x, y) + \varepsilon\zeta(x, y)$$

e Schar von Extremalflächen dar. *Wählt man* $\chi(s) > 0$, *so ist ferner* $T + S$

$$\zeta(x, y) > 0.$$

Die Schar (42) *bildet ein Feld von Extremalen.*

Nach Voraussetzung ist $\lambda_1 > 1$. Es gibt darum stets eine und nur e in $T + S$ reguläre Lösung der Differentialgleichung (32), die auf S e beliebige stetige Folge von Werten annimmt. Also existiert die zu T örige, auf S verschwindende Greensche Funktion $\mathfrak{G}(\xi, \eta; x, y)$ dieser ferentialgleichung[15]). Es sei $\psi(x, y)$ eine in $T + S$ stetige, den Un- chheiten

[15]) Als Funktion von (x, y) aufgefaßt, ist $\mathfrak{G}$ eine in $T+S$, außer in (ξ, η), re- ire, auf S verschwindende Lösung der Differentialgleichung $A(u) = 0$, die sich in Umgebung von (ξ, η) wie

$$g(\xi, \eta; x, y) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{a(\xi,\eta)c(\xi,\eta) - (b(\xi,\eta))^2}} \times$$
$$\times \log\left\{c(\xi,\eta)(x-\xi)^2 - 2b(\xi,\eta)(x-\xi)(y-\eta) + a(\xi,\eta)(y-\eta)^2\right\}$$

hält. Die Funktionen $\gamma = \mathfrak{G} - g$, $\left(\left|\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right|\right)|\log\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}|^{-1}$ in der Umgebung von (ξ, η) beschränkt. Bekanntlich ist

$$\mathfrak{G}(\xi, \eta; x, y) = \mathfrak{G}(x, y; \xi, \eta).$$

$$(44)\quad |\psi(x,y)|<N,\quad |\psi(x+h,\,y+h_1)-\psi(x,y)|<N(|h|+|h_1|)^{\mu}$$
$$0<\mu<1\ (N \text{ konstant}$$

genügende Funktion. Es gibt eine und nur eine in T und auf S stetige in T reguläre, auf S verschwindende Lösung der Differentialgleichung

$$(45)\qquad \Lambda(Z)=\psi(x,y).$$

Sie ist auch noch auf S regulär und hat den Wert

$$(46)\qquad Z(\xi,\eta)=-\frac{1}{2\pi}\int_T \mathfrak{G}(\xi,\eta;\,x,y)\,\psi(x,y)\,dx\,dy.$$

Wie ich in Verallgemeinerung eines Hilfssatzes von Herrn Korn in de ersten Abhandlung bewiesen habe, ist in T und auf S

$$(47)\quad \begin{gathered}|Z(\xi,\eta)|,\quad |D_1Z(\xi,\eta)|,\quad |D_2Z(\xi,\eta)|<\alpha N,\\ |D_2Z(\xi+h,\eta+h_1)-D_2Z(\xi,\eta)|<\alpha N(|h|+|h_1|)^{\mu}\ (\alpha \text{ konstant})^{16}.\end{gathered}$$

Es sei $\chi(x,y)$ diejenige in $T+S$ stetige, in T reguläre Lösung de Differentialgleichung $\Lambda(u)=0$, die auf S den Wert $\chi(s)$ annimmt. Di Funktion $\chi(x,y)$ hat in T und auf S stetige partielle Ableitungen erste und zweiter Ordnung. Es gilt ferner in T und auf S:

$$(48)\quad |D_2\chi(x+h,y+h_1)-D_2\chi(x,y)|<\alpha' M(|h|+|h_1|)^{\mu}\quad (\alpha' \text{ konstant}$$

Wir denken uns ε so gewählt, daß die Fläche $x,\,y,\,z(x,y)+\varepsilon\chi(x,y$ ganz im Innern von $\mathfrak{R}$ enthalten ist. Wir setzen

$$(49)\qquad \zeta(x,y)=\chi(x,y)+\tau(x,y).$$

Die Funktion τ ist in $T+S$ stetig und in T regulär. Sie ver schwindet auf S und genügt der Differentialgleichung

$$(50)\qquad \begin{aligned}\Lambda(\tau)&=\frac{\partial}{\partial x}\Big(a\frac{\partial\tau}{\partial x}+b\frac{\partial\tau}{\partial y}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(b\frac{\partial\tau}{\partial x}+c\frac{\partial\tau}{\partial y}\Big)+k\tau\\ &=\varepsilon\,\Theta(x,y,\tau,\tau_x,\tau_y,\tau_{xx},\tau_{xy},\tau_{yy}).\end{aligned}$$

Unter Θ wird dabei eine für alle (x,y) in $T+S$, alle dem absolute Betrage nach hinreichend kleinen reellen Werte von ε und τ,

$$|\varepsilon|\leqq\varepsilon_1,\quad |\tau|\leqq\delta_1 \qquad (\varepsilon_1,\,\delta_1 \text{ konstant}$$

und alle reellen $\tau_x,\tau_y,\tau_{xx},\tau_{xy},\tau_{yy}$ reguläre und analytische Funktion vo $\tau,\tau_x,\tau_y,\tau_{xx},\tau_{xy},\tau_{yy}$ verstanden. Für alle $|\varepsilon|\leqq\varepsilon_1$ und alle die Beziehunge

$$|\tau|,|\tau_x|,\ldots,|\tau_{yy}|\leqq\delta_1$$

---

[16]) Vgl. loc. cit.[4]) S. 21, Formel (42). Dort sind die Bezeichnungen etwas ander Es genügt $N=M$, $\alpha=2\beta$ zu setzen, um von den Formeln (42) zu den einfacher Formeln des Textes zu gelangen.

üllenden τ genügt Θ der Ungleichheit

$$|\Theta(x+h, y+h_1; \tau, \tau_x, \ldots, \tau_{yy}) - \Theta(x, y; \tau, \tau_x, \ldots, \tau_{yy})| \leq \alpha^*(|h|+|h_1|)^\mu$$
(α^* konstant).

Es sei $t(x, y)$ irgendeine in $T+S$ nebst ihren partiellen Ableitungen ter und zweiter Ordnung stetige, den Beziehungen

$$|, |D_1 t|, |D_2 t| < \delta_1, \quad |D_2 t(x+h, y+h_1) - D_2 t(x, y)| < \delta_1(|h|+|h_1|)^\mu$$

ügende Funktion. Wir setzen

$$\Theta(x, y, t, t_x, t_y, t_{xx}, t_{xy}, t_{yy}) = \tilde{\Theta}(x, y).$$

Es ist für alle $|\varepsilon| \leqq \varepsilon_1$

$$) \quad |\tilde{\Theta}| < P, \quad |\tilde{\Theta}(x+h, y+h_1) - \tilde{\Theta}(x, y)| < P(|h|+|h_1|)^\mu$$
(P konstant).

Aus (50) folgt

$$:) \quad \tau(\xi, \eta) = -\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_T \mathfrak{G}(\xi, \eta; x, y)\, \Theta(x, y, \tau, \tau_x, \tau_y, \tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yy})\, dx\, dy.$$

ese Integro-Differentialgleichung wird nun durch sukzessive Approximanen gelöst. Wir setzen zunächst rein formell

$$\tau^{(0)}(\xi, \eta) = -\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_T \mathfrak{G}(\xi, \eta; x, y)\, \Theta(x, y, 0, 0, 0, 0, 0, 0)\, dx\, dy,$$

$$\tau^{(1)}(\xi, \eta) = -\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_T \mathfrak{G}(\xi, \eta; x, y)\, \Theta(x, y, \tau^{(0)}, \tau_x^{(0)}, \tau_y^{(0)}, \tau_{xx}^{(0)}, \tau_{xy}^{(0)}, \tau_{yy}^{(0)})\, dx\, dy,$$

. . . . . .

$$\tau^{(j+1)}(\xi, \eta) = -\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_T \mathfrak{G}(\xi, \eta; x, y)\, \Theta(x, y, \tau^{(j)}, \tau_x^{(j)}, \tau_y^{(j)}, \tau_{xx}^{(j)}, \tau_{xy}^{(j)}, \tau_{yy}^{(j)})\, dx\, dy$$

. . . . . .

Es sei ε so klein gewählt, $\varepsilon \leqq \varepsilon' \leqq \varepsilon_1$, daß für alle (x, y) in $T+S$

$$|\tau^{(j)}|, |D_1 \tau^{(j)}|, |D_2 \tau^{(j)}| < \tfrac{1}{2}\delta_1,$$
$$) \quad |D_2 \tau^{(j)}(x+h, y+h_1) - D_2 \tau^{(j)}(x, y)| < \tfrac{1}{2}\delta_1(|h|+|h_1|)^\mu$$
$(j = 0, 1, \ldots, \varkappa)$

. Aus (46), (47), (51), (54) folgt jetzt

$$|\tau^{(\varkappa+1)}|, |D_1 \tau^{(\varkappa+1)}|, |D_2 \tau^{(\varkappa+1)}| < \varepsilon \alpha P,$$
$$) \quad |D_2 \tau^{(\varkappa+1)}(x+h, y+h_1) - D_2 \tau^{(\varkappa+1)}(x, y)| < \varepsilon \alpha P(|h|+|h_1|)^\mu$$

Es sei ε_2 die kleinere der beiden Zahlen ε' und $\frac{\delta_1}{2\alpha P}$. Wird

$$) \quad |\varepsilon| \leqq \varepsilon_2$$

vählt, so gilt offenbar die Beziehung (54) auch für $\tau^{(\varkappa+1)}$; sie gilt darum alle j. Die Argumente von Θ verlassen gewiß nicht den Definitionseich dieser Funktion.

Wir setzen zur Abkürzung

$$\nu^{(\varkappa)} = \tau^{(\varkappa)} - \tau^{(\varkappa-1)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots \tag{56}$$

Aus (53) folgt

$$\nu^{(n+1)}(\xi, \eta) = -\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_T \mathfrak{G}(\xi, \eta; x, y)\, \Pi^{(n+1)}(x, y)\, dx\, dy \tag{57}$$

$$\Pi^{(n+1)}(x, y) = \Theta(x, y, \tau^{(n)}, \tau_x^{(n)}, \ldots, \tau_{yy}^{(n)}) - \Theta(x, y, \tau^{(n-1)}, \tau_x^{(n-1)}, \ldots, \tau_{yy}^{(n-1)}$$

$$= \Theta_1 \nu^{(n)} + \Theta_2 \nu_x^{(n)} + \ldots + \Theta_6 \nu_{yy}^{(n)},$$

$$\Theta_1(x, y, \nu^{(n)}, \tau^{(n-1)}, \tau_x^{(n)}, \ldots, \tau_{yy}^{(n)}) \tag{58}$$

$$= \frac{1}{\tau^{(n)} - \tau^{(n-1)}} \{\Theta(x, y, \tau^{(n)}, \tau_x^{(n)}, \ldots, \tau_{yy}^{(n)}) - \Theta(x, y, \tau^{(n-1)}, \tau_x^{(n)}, \ldots, \tau_{yy}^{(n)})\},$$

$$\Theta_2(x, y, \tau^{(n-1)}, \nu_x^{(n)}, \tau_x^{(n-1)}, \tau_y^{(n)}, \ldots, \tau_{yy}^{(n)})$$

$$= \frac{1}{\tau_x^{(n)} - \tau_x^{(n-1)}} \{\Theta(x, y, \tau^{(n-1)}, \tau_x^{(n)}, \tau_y^{(n)}, \ldots, \tau_{yy}^{(n)}) - \Theta(x, y, \tau^{(n-1)}, \tau_x^{(n-1)}, \tau_y^{(n)}, \ldots$$

. . . . . .

Man kann gewiß δ_1 so klein wählen, daß Θ_1 für alle $|\varepsilon| \leqq \varepsilon_1$, al
(x, y) in $T + S$ und alle *komplexen* $\tau, \tau_x, \tau_y, \ldots, \tau_{yy}$ im Gebiete

$$|\tau| \leqq \delta_1, |\tau_x| \leqq \delta_1, |\tau_y| \leqq \delta_1, \ldots, |\tau_{yy}| \leqq \delta_1 \tag{59}$$

sich als Funktion von $\tau, \tau_x, \ldots, \tau_{yy}$ analytisch und regulär verhält und d
Ungleichheit (50*) erfüllt. Wie man sich, etwa unter Benutzung der Cauch
schen Integralformel, ohne Schwierigkeiten überzeugt, ist wegen (50*) f
alle (x, y) in T und auf S und alle den Beziehungen

$$|\nu^{(n)}| \leqq \frac{\delta_1}{2}, \quad |\tau^{(n-1)}| \leqq \frac{\delta_1}{2}, \quad |\tau_x^{(n)}| \leqq \delta_1, \ldots, |\tau_{yy}^{(n)}| \leqq \delta_1 \tag{60}$$

genügenden Werte von $\nu^{(n)}, \tau^{(n-1)}, \tau_x^{(n)}, \ldots, \tau_{yy}^{(n)}$

$$|\Theta_1(x + h, y + h_1; \nu^{(n)}, \tau^{(n-1)}, \tau_x^{(n)}, \ldots, \tau_{yy}^{(n)}) \tag{61}$$
$$- \Theta_1(x, y; \nu^{(n)}, \tau^{(n-1)}, \tau_x^{(n)}, \ldots, \tau_{yy}^{(n)})| < P_1(|h| + |h_1|$$
(P_1 konstant

Es möge nunmehr in $T + S$

$$|\nu^{(n)}|, |D_1 \nu^{(n)}|, |D_2 \nu^{(n)}| < \frac{\delta_1}{2}, \tag{62}$$

$$|D_2 \nu^{(n)}(x + h, y + h_1) - D_2 \nu^{(n)}(x, y)| < \frac{\delta_1}{2}(|h| + |h_1|)^{\mu}$$

sein. Aus (61) folgt, wenn man

$$\Theta_1(x, y, \nu^{(n)}, \tau^{(n-1)}, \tau_x^{(n)}, \ldots, \tau_{yy}^{(n)}) = \tilde{\Theta}_1(x, y) \tag{63}$$

setzt,

) $|\tilde{\Theta}_1| < \frac{1}{12} P_2$, $|\tilde{\Theta}_1(x+h, y+h_1) - \tilde{\Theta}_1(x, y)| < \frac{1}{12} P_2 (|h| + |h_1|)''$
(P_2 konstant)[17]).

Ganz analoge Ungleichheiten erhält man für die Funktionen $\tilde{\Theta}_2, \ldots, \tilde{\Theta}_6$.
e man sich leicht überzeugt, folgt aus (57), (62), (64) und (47)

$$|\nu^{(n+1)}|, |D_1 \nu^{(n+1)}|, |D_2 \nu^{(n+1)}| < \alpha \varepsilon P_2 \frac{\delta_1}{2},$$

$$|\nu^{(n+1)}(x+h, y+h_1) - \nu^{(n+1)}(x, y)| < \alpha \varepsilon P_2 \frac{\delta_1}{2} (|h| + h_1|)''.$$

Wählt man

$$\varepsilon \leqq \varepsilon_3 = \operatorname{Min}\left(\varepsilon_2, \frac{1}{2 \alpha P_2}\right),$$

erhält man aus (65) und (66) vor allem

$$|\nu^{(n+1)}|, |D_1 \nu^{(n+1)}|, |D_2 \nu^{(n+1)}| \leqq \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta_1}{2} < \frac{\delta_1}{2},$$

$$^{(n+1)}(x+h, y+h_1) - D_2 \nu^{(n+1)}(x, y)| \leqq \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta_1}{2} (|h| + |h_1|)^{\mu} < \frac{\delta_1}{2} (|h| + |h_1|)^{\mu}.$$

n kann gewiß $|\varepsilon|$ so klein wählen, $|\varepsilon| \leqq \varepsilon_4 \leqq \varepsilon_3$, daß die Beziehungen (62)
$n = 1$ gelten. Sie gelten mithin für alle n. Also sind alle bisherigen
schätzungen für alle n gültig.

Augenscheinlich ist

$$|\nu^{(j)}|, |D_1 \nu^{(j)}|, |D_2 \nu^{(j)}| < \frac{1}{2^{j-1}} \frac{\delta_1}{2},$$

)
$$|D_2 \nu^{(j)}(x+h, y+h_1) - D_2 \nu^{(j)}(x, y) < \frac{1}{2^{j-1}} \frac{\delta_1}{2} (|h| + |h_1|)''.$$

Die unendlichen Reihen

) $\tau^{(0)} + \sum \nu^{(j)}$, $D_1 \tau^{(0)} + \sum D_1 \nu^{(j)}$, $D_2 \tau^{(0)} + \sum D_2 \nu^{(j)}$

ıvergieren in $T + S$ gleichmäßig. Es sei

$$\tau = \tau^{(0)} + \sum_{j=1}^{\infty} \nu^{(j)}.$$

Die Funktion τ hat in $T + S$ stetige partielle Ableitungen erster und
eiter Ordnung und genügt der Integro-Differentialgleichung (52). In
$+ S$ ist wegen (54)

$$|D_2 \tau(x+h, y+h_1) - D_2 \tau(x, y)| < \tfrac{1}{2} \delta_1 (|h| + |h_1|)''.$$

[17]) In (61) werden $\nu^{(n)}, \tau^{(n-1)}, \tau_x^{(n)}, \ldots, \tau_{yy}^{(n)}$ wie von einander unabhängige Ar-
nente behandelt. Die Beziehungen (64) gelten für alle den Ungleichheiten (39)
ügenden Randfunktionen $\chi(s)$ gleichmäßig.

Offenbar ist

$$x, y, \bar{z}(x,y) \equiv z(x,y) + \varepsilon(\chi(x,y) + \tau(x,y)) \tag{73}$$

für alle $|\varepsilon| \leqq \varepsilon^* = \varepsilon_4$ *eine stetige Schar von Extremalflächen.*

Aus (52) folgt für alle (x,y) in $T+S$ gleichmäßig

$$\lim_{\varepsilon=0} \tau(x,y) = 0, \quad \lim_{\varepsilon=0} D_1\tau(x,y) = 0, \quad \lim_{\varepsilon=0} D_2\tau(x,y) = 0, \tag{74}$$

mithin

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\bar{z}(x,y) - z(x,y)}{\varepsilon} = \chi(x,y). \tag{75}$$

Ist $\chi(s) > 0$, demnach $\chi(x,y) > 0$, so ist

$$\left|\frac{\partial \bar{z}(x,y)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} > 0. \tag{76}$$

Wir schreiben vorübergehend $\bar{z}(x,y,\varepsilon)$ für $\bar{z}(x,y)$. Aus Stetigkeitsgründen ist für alle $|\varepsilon| \leqq \varepsilon_5 \leqq \varepsilon_4$

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\bar{z}(x,y,\varepsilon) > 0. \tag{77}$$

Die Schar $\bar{z}(x,y,\varepsilon)$, $|\varepsilon| \leqq \varepsilon_5$ *bildet ein Feld von Extremalflächen.*

Ist, wie wir jetzt annehmen wollen, $f_{pp} f_{qq} - f_{pq}^2 > 0$ für alle x, y, in $\mathfrak{R}$ und alle reellen p und q, so liegt ein starkes Minimum vor.

§ 3.

Geht man die Betrachtungen des vorhergehenden Paragraphen noch einmal aufmerksam durch, so findet man leicht, daß die dort durchgeführten Abschätzungen für alle den Beziehungen (39) und (40) genügenden Funktionen $\chi(s)$ *gleichmäßig* gelten. Zu jeder Extremalfläche $x, y, \bar{z}(x,y)$ gehört eine durch die Einführung des Parameters λ erweiterte Jacobische Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{a}\frac{\partial u}{\partial x} + \bar{b}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{b}\frac{\partial u}{\partial x} + \bar{c}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \bar{\lambda}\bar{k}u = 0. \tag{78}$$

Wird zur Abkürzung

$$\bar{a} - a = \Delta a, \ldots \quad \bar{k} - k = \Delta k \tag{79}$$

gesetzt, so gilt, wie sich ohne wesentliche Schwierigkeiten zeigen läßt, für alle $|\varepsilon| \leqq \varepsilon_6 \leqq \varepsilon_5$

$$\begin{gathered} |\Delta a| < \alpha_{11}\varepsilon, \quad |D_1 \Delta a| < \alpha_{11}\varepsilon, \\ |D_1 \Delta a(x+h, y+h_1) - D_1 \Delta a(x,y)| < \alpha_{11}\varepsilon(|h| + |h_1|)^{\prime\prime}, \\ |\Delta b| < \alpha_{11}\varepsilon, \quad |D_1 \Delta b| < \alpha_{11}\varepsilon, \quad \ldots \end{gathered} \tag{80}$$

Funktionen $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{k}$, $D_1\bar{a}$, $D_1\bar{b}$, $D_1\bar{c}$ konvergieren, wenn ε gegen 1 strebt, für alle den Beziehungen (39) und (40) genügenden Funktionen $\chi(s)$ *gleichmäßig* gegen a, b, c, k, D_1a, D_1b, D_1c. Auch der kleinste positive Eigenwert $\bar{\lambda}_1$ der Differentialgleichung (78) konvergiert für $\varepsilon \to 0$ *gleichmäßig* gegen λ_1. Ist ϑ irgendeine positive Zahl $< \lambda_1 - 1$, so gibt es demnach einen Wert $\varepsilon_7 \leqq \varepsilon_6$, so daß für alle $|\varepsilon| \leqq \varepsilon_7$ und alle den Bedingungen (39) und (40) genügenden Funktionen $\chi(s)$ ... $> 1 + \vartheta$ gilt.

Es sei $\mathfrak{h}(s)$ eine auf S erklärte, den Beziehungen

$$|\mathfrak{h}(s)|, \quad \left|\frac{d\mathfrak{h}(s)}{ds}\right|, \quad \left|\frac{d^2\mathfrak{h}(s)}{ds^2}\right| < M,$$

$$\left|\frac{d^2\mathfrak{h}(s+h)}{ds^2} - \frac{d^2\mathfrak{h}(s)}{ds^2}\right| < M|h|''$$

ügende, wesentlich positive Funktion:

$$\mathfrak{h}(s) > \mathfrak{h}_0 > 0.$$

e wir in § 2 bewiesen haben, gibt es für alle $|\varepsilon| \leqq \frac{\varepsilon_7}{2}$, $|\nu| \leqq \frac{\varepsilon_7}{2}$ eine remalfläche $\bar{\bar{z}}(x, y, \varepsilon, \nu)$, die auf dem Rande die Werte $\bar{z}(x, y) + \nu\mathfrak{h}(s)$ $(x, y) + \varepsilon\chi(s) + \nu\mathfrak{h}(s)$ annimmt. Diese Schar bildet bei festgehaltenen) und ε gewiß für $|\nu| \leqq \frac{\varepsilon_7}{2}$ ein Feld, in das die Extremalfläche $\bar{z}(x, y)$ ndkurve $z(x, y) + \varepsilon\chi(x, y)$) eingebettet ist. In der Tat ist nämlich partielle Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\bar{\bar{z}}(x, y, \varepsilon, \nu) \qquad \left(|\nu| \leqq \frac{\varepsilon_7}{2}\right)$$

enige Lösung der zu $\bar{z}(x, y, \varepsilon, \nu)$ gehörigen Jacobischen Differentialchung, die auf dem Rande den Wert $\mathfrak{h}(s)$ annimmt. Da $\mathfrak{h}(s) > \mathfrak{h}_0 > 0$ der kleinste positive Eigenwert $\bar{\bar{\lambda}}_1 > 1 + \vartheta$ ist, so ist

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\bar{\bar{z}}(x, y, \varepsilon, \nu) > \alpha_{12} > 0.$$

sieht jetzt leicht ein, daß es einen positiven Wert $\varepsilon_8 \leqq \varepsilon_7$ gibt, so folgendes zutrifft.

Es sei ε irgendwie der Beziehung $|\varepsilon| \leqq \varepsilon_8$ gewählt, dann aber festalten. Das von der Schar $\bar{\bar{z}}(x, y, \varepsilon, \nu)$ $\left(|\nu| \leqq \frac{\varepsilon_7}{2}\right)$ lückenlos erfüllte chenstück enthält alle Extremalflächen mit der Randkurve $z(x, y) + \varepsilon\chi(s)$. gilt, wie auch die Funktion $\chi(s)$ den Beziehungen (81) gemäß gelt ist.

Wir werden von dieser Bemerkung am Schluß des zweiten Kapitels rauch machen.

§ 4.

Wir wenden uns jetzt der Betrachtung des Falles $\lambda_1 = 1$ zu.

Bekanntlich ist der kleinste positive Eigenwert λ_1 ein einfacher Eigenwert. Die zugehörige Eigenfunktion φ_1 ist in T nirgends gleich Null. Es sei $\bar{q}$, wie am Schluß des § 1, eine analytische und reguläre, in T durchweg negative Funktion, die so gewählt ist, daß in T und auf S

$$k - \bar{q} > 0 \tag{85}$$

ausfällt. Offenbar sind $\lambda_1 = 1$ und φ_1 zugleich der kleinste positive Eigenwert und die zugehörige Eigenfunktion der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(b\frac{\partial u}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \bar{q}u + \nu(k-q)u = 0 \text{ [18]}. \tag{86}$$

Wir wollen unter $\psi_1, \psi_2, \ldots$ die den Beziehungen

$$\int_T (k-\bar{q})\psi_j\psi_l\,dx\,dy = 0 \qquad (j \neq l), \quad \int_T (k-\bar{q})\psi_j^2\,dx\,dy = 1 \tag{87}$$

gemäß normierten Eigenfunktionen dieser Differentialgleichung verstehen [19]. Es sei ferner zur Vereinfachung

$$D_T(U) = \int_T \left\{a\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y} + c\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 - \bar{q}U^2\right\} dx\,dy \tag{88}$$

gesetzt.

Wir schreiben

$$\zeta = x_1\psi_1 + Z \tag{89}$$

und erhalten wegen

$$D_T(\psi_1) - \int_T (k-q)\psi_1^2\,dx\,dy = 0: \tag{90}$$

$$J_2 = \tfrac{1}{2}D_T(Z) - \tfrac{1}{2}\int_T (k-\bar{q})Z^2\,dx\,dy = \tfrac{1}{2}\sum{}'(\nu_j - 1)x_j^2, \tag{91}$$

$$x_j = \int_T (k-\bar{q})Z\psi_j\,dx\,dy = \int_T (k-\bar{q})\zeta\psi_j\,dx\,dy. \tag{92}$$

---

[18]) Die Eigenwerte $\nu_1, \nu_2, \ldots$ dieser Differentialgleichung sind sämtlich positiv.

[19]) Offenbar ist $\nu_1 = \lambda_1$, $\psi_1 = \varphi_1$ Const. Ist u eine in $T+S$ stetige, auf S verschwindende Funktion, die in $T+S$ abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat, so gelten die Formeln

$$D_T(u) = \sum \lambda_j\left(\int_T (k-\bar{q})u\psi\,dx\,dy\right)^2,$$

$$\int_T (k-q)u^2\,dx\,dy = \sum\left(\int_T (k-\bar{q})u\psi_j\,dx\,dy\right)^2$$

Vgl. L. Lichtenstein, loc. cit. [6]), S. 132—136 sowie S. 150—151. An der bezeichneten Stelle wird (S. 132—136) $a = c = p$, $b = 0$, $\bar{q} = 0$, $k = 1$ angenommen. Der allgemeinere Fall des Textes läßt sich ganz analog elementar erledigen.

Durch das Zeichen $\sum'$ soll angedeutet werden, daß bei der Sum-
ion der Wert $j = 1$ außer Betracht bleibt.

Es ist

$$D_T(\zeta) = x_1^2 + D_T(Z),$$

nach

$$D_T(Z) \leqq D_T(\zeta)$$

wegen (9)

$$x_1^2 \leqq \int_T |\bar{q}|\,\zeta^2\,dx\,dy < \alpha_{13}^2 M^2, \qquad |x_1| < \alpha_{13} M.$$

(9), (89) und (95) folgt

$$|Z| < \alpha_{14} M, \qquad |D_1 Z| < \alpha_{14} M.$$

rachten wir die dritte Variation J_3. Setzt man in diese $\zeta = x_1\psi_1 + Z$
so erhält man unter dem Integralzeichen eine ganze rationale Funktion
$Z, \frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial y}$. Die von $Z, \frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial y}$ freien Glieder sind

$$x_1^3 \Delta_3 = \frac{1}{3!} x_1^3 \int_T \left\{ f_{ppp}\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right)^3 + 3 f_{ppq}\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \ldots + f_{zzz}\psi_1^3 \right\} dx\,dy.$$

In bekannter Weise findet man als eine für das Eintreten eines
imums notwendige Bedingung die Beziehung

$$\boxed{\Delta_3 = 0}$$

Betrachten wir jetzt die Glieder, die in bezug auf Z und $D_1 Z$ vom
ten und dritten Grade sind. Sie sind dem absoluten Betrage nach
ner als $\alpha_{15} D_T(Z)$. Dies ist für die Glieder zweiter Ordnung wegen (19)
(20) fast unmittelbar einleuchtend. Was die Glieder dritter Ordnung
ifft, so sind hier Beziehungen wie

$$|Z|^3 \leqq \alpha_{14} M |Z|^2$$

gl. zu berücksichtigen. Wir können darum setzen

$$J_3 = \bar{J}_3 + x_1^2 \int_T \left(h_1 Z + h_2 \frac{\partial Z}{\partial x} + h_3 \frac{\partial Z}{\partial y} \right) dx\,dy, \qquad |\bar{J}_3| \leqq \alpha_{15} D_T(Z)$$

nach einer teilweisen Integration

$$J_3 = \bar{J}_3 + x_1^2 \int_T h Z\,dx\,dy.$$

In analoger Weise erhält man

$$J_4 = \bar{J}_4 + x_1^3 \int_T h' Z\,dx\,dy + x_1^4 \Delta_4, \qquad |\bar{J}_4| \leqq \alpha_{16} D_T(Z),$$

unter $x_1^4 \Delta_4$ die Gesamtheit der von Z und $D_1 Z$ freien Glieder in Δ verstanden:

$$\Delta_4 = \frac{1}{4!}\int_T \left\{ f_{pppp}\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right)^4 + \ldots + f_{zzzz}\psi_1^4 \right\} dx\,dy. \tag{103}$$

Die Gesamtvariation des Integrals J läßt sich demnach in der Form schreiben:

$$\begin{aligned} \Delta J &= \varepsilon^2 J_2 + \varepsilon^3 J_3 + \varepsilon^4 J_4 + \varepsilon^5 R_5 \\ &= \frac{\varepsilon^2}{2}\sum{}'(\nu_j - 1)x_j^2 + \varepsilon^3 x_1^2 \int_T h Z\,dx\,dy + \varepsilon^4 x_1^3 \int_T h' Z\,dx\,dy \\ &\quad + \varepsilon^3 \bar{J}_3 + \varepsilon^4 \bar{J}_4 + \varepsilon^4 x_1^4 \Delta_4 + \varepsilon^5 R_5. \end{aligned} \tag{104}$$

Der Rest R_5 ist das Integral über einer Form fünften Grades d Argumente $x_1\psi_1 + Z$, $x_1\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial x}$, $x_1\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial y}$.

Für die Gesamtheit der Glieder zweiten bis fünften Grades in bez auf $Z, \frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial y}$ gewinnt man leicht eine Abschätzung von der Form $\alpha_{17} D_T(Z$ für die übrigen Glieder eine Abschätzung von der Form $\alpha_{18} x_1^4$, so d man alles in allem setzen kann

$$|R_5| \leqq \alpha_{17} D_T(Z) + \alpha_{18} x_1^4. \tag{105}$$

Für (104) kann man auch schreiben

$$\begin{aligned} \Delta J &= \frac{\varepsilon^2}{2}\sum{}'(\nu_j - 1)x_j^2 + \varepsilon^3 \sum{}' x_j x_1^2 \int_T h\psi_j\,dx\,dy + \varepsilon^4 \sum{}' x_j x_1^3 \int_T h'\psi_j \\ &\quad + \varepsilon^3 \bar{J}_3 + \varepsilon^4 \bar{J}_4 + \varepsilon^4 x_1^4 \Delta_4 + \varepsilon^5 R_5 \\ &= \frac{\varepsilon^2}{2}\sum{}'(\nu_j - 1)\left\{ x_j + \varepsilon x_1^2 \frac{\int_T h\psi_j\,dx\,dy}{\nu_j - 1} - \varepsilon x_1^3 \frac{\int_T h'\psi_j\,dx\,dy}{\nu_j - 1} \right\}^2 \\ &\quad + \varepsilon^3 \bar{J}_3 + \varepsilon^4 \bar{J}_4 + \varepsilon^4 x_1^4 \left\{ \Delta_4 - \sum{}' \frac{\left(\int_T (h + \varepsilon x_1 h')\psi_j\,dx\,dy\right)^2}{2(\nu_j - 1)} \right\} + \varepsilon^5 R_5 \end{aligned} \tag{106}$$

Aus der Formel (106) *folgt, wie wir jetzt zeigen wollen, die weite für das Eintreten eines Minimums notwendige Bedingung*.

$$\boxed{\Delta_4 - \sum{}' \frac{\left(\int_T h\psi_j\,dx\,dy\right)^2}{2(\nu_j - 1)} \geqq 0.} \tag{107}$$

---

[20]) Diese Umformung ist zulässig, denn, wie weiter unten gezeigt wird, unendliche Reihe

$$\sum{}' \frac{\left(\int_T (h + \varepsilon x_1 h')\psi_j\,dx\,dy\right)^2}{\nu_j - 1}$$

konvergiert.

Aus (107) folgt insbesondere

$$\Delta_4 \geqq 0.$$

1. Es sei zunächst

$$\Delta_4 - \sum{}' \frac{\left(\int_T h\psi_j\,dx\,dy\right)^2}{2(\nu_j-1)} > 0.$$

Dann ist für hinreichend kleine positive Werte von δ_2 und ε gewiß

$$\Delta_4 - \sum{}' \frac{\left(\int_T (h+\varepsilon x_1 h')\psi_j\,dx\,dy\right)^2}{2(1-\delta_2)(\nu_j-1)} > \delta_3 > 0.$$

Der Ausdruck (106) läßt sich nun wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}\Delta J = \frac{\varepsilon^2}{2}\sum{}'(1-\delta_2)(\nu_j-1)\left\{x_j + \varepsilon x_1^2 \frac{\int_T (h+\varepsilon x_1 h')\psi_j\,dx\,dy}{(1-\delta_2)(\nu_j-1)}\right\}^2 \\ + \varepsilon^4 x_1^4\left\{\Delta_4 - \frac{\left(\int_T (h+\varepsilon x_1 h')\psi_j\,dx\,dy\right)^2}{2(1-\delta_2)(\nu_j-1)}\right\} \\ + \frac{\delta_2\varepsilon^2}{2}\sum{}'(\nu_j-1)x_j^2 + \varepsilon^3\bar{J}_3 + \varepsilon^4\bar{J}_4 + \varepsilon^5 R_5 = \sum_{j=1}^{6} K_j.\end{aligned}$$

Der Ausdruck K_1 ist nicht negativ, K_2 ist dem absoluten Betrage nach größer als $\delta_3\varepsilon^4 x_1^4$. Es gilt ferner

$$K_3 \geqq \left(1-\frac{1}{\nu_2}\right)\delta_2\frac{\varepsilon^2}{2}\sum{}'\nu_j x_j^2 = \left(1-\frac{1}{\nu_2}\right)\delta_2\frac{\varepsilon^2}{2}D_T(Z)$$

wegen (100), (102) und (105)

$$|K_4| + |K_5| + |K_6| < \alpha_{19}|\varepsilon|^3 D_T(Z) + \alpha_{20}|\varepsilon|^5 x_1^4.$$

Für alle hinreichend kleinen ε, etwa $|\varepsilon| \leqq \varepsilon_9 \leqq \varepsilon_0$, ist demnach

$$|\Delta J| \geqq \alpha_{20}\varepsilon^2 D_T(Z) + \alpha_{21}\varepsilon^4 x_1^4,$$

ei das Gleichheitszeichen nur für $x_1 = 0$, $Z \equiv 0$, demnach $\zeta \equiv 0$ gilt. *Es liegt ein schwaches Minimum vor.*

2. Es möge jetzt zweitens

$$\Delta_4 - \sum{}' \frac{\left(\int_T h\psi_j\,dx\,dy\right)^2}{2(\nu_j-1)} < 0$$

Dann ist für hinreichend kleine Werte von $\delta_4 > 0$ und $|\varepsilon|$ gewiß

$$\Delta_4 - \sum{}' \frac{\left\{\int_T (h+\varepsilon x_1 h')\psi_j\,dx\,dy\right\}^2}{2(1+\delta_4)(\nu_j-1)} < -\delta_5 < 0.$$

Wir schreiben

$$\Delta J = \frac{\varepsilon^2}{2}\sum{}'(1+\delta_4)(\nu_j-1)\left\{x_j+\varepsilon x_1^2\frac{\int_T(h+\varepsilon x_1 h')\psi_j\,dx\,dy}{(1+\delta_4)(\nu_j-1)}\right\}^2$$

$$(117)\qquad +\varepsilon^4 x_1^4\left\{\Delta_4-\frac{\left(\int_T(h+\varepsilon x_1 h')\psi_j\,dx\,dy\right)^2}{2(1+\delta_4)(\nu_j-1)}\right\}-\delta_4\frac{\varepsilon^2}{2}\sum{}'(\nu_j-1)x_j^2$$

$$+\varepsilon^3\bar{J}_3+\varepsilon^4\bar{J}_4+\varepsilon^5 R_5=\sum_{j=1}^{6}K_j'.$$

Setzen wir einmal

$$(118)\qquad \bar{x}_j=-\varepsilon x_1^2\frac{\int_T(h+\varepsilon x_1 h')\psi_j\,dx\,dy}{(1+\delta_4)(\nu_j-1)}.$$

Die unendliche Reihe

$$(119)\qquad Z^*=\sum{}'\bar{x}_j\psi_j$$

konvergiert, wie wir jetzt zeigen wollen, unbedingt und gleichmäßig u stellt eine in $T+S$ nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnu stetige Funktion dar.

Sei $\mathfrak{G}^*(\xi,\eta;x,y)$ die auf S verschwindende Greensche Funkti der Differentialgleichung

$$(120)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(b\frac{\partial u}{\partial x}+c\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\bar{q}u=0.$$

Nach bekannten Sätzen der Theorie linearer Integralgleichungen is

$$(121)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_T\mathfrak{G}^*(\xi,\eta;x,y)(h+\varepsilon x_1 h')\,dx\,dy=\sum\frac{\psi_j}{\nu_j}\int_T(h+\varepsilon x_1 h')\psi_j\,dx$$

wobei die unendliche Reihe rechts unbedingt und gleichmäßig konvergie Es sei

$$(122)\qquad Z_1=\sum{}'\frac{\psi_j}{\nu_j-1}\int_T(h+\varepsilon x_1 h')\psi_j\,dx\,dy^{21}).$$

Augenscheinlich ist

$$(123)\qquad Z_2=\sum{}'\frac{\psi_j(\xi,\eta)}{\nu_j(\nu_j-1)}\int_T(h+\varepsilon x_1 h')\psi_j\,dx\,dy$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_T\mathfrak{G}^*(\xi,\eta;x,y)(k-\bar{q})Z_1\,dx\,dy$$

ebenso wie (121) eine nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnu in T und auf S stetige Funktion. Wegen

$$(124)\qquad \frac{1}{\nu_j}-\frac{1}{\nu_j-1}=\frac{1}{\nu_j(\nu_j-1)}$$

---

[21]) Die Reihe rechts konvergiert, wie aus dem Vergleich mit (121) hervorge unbedingt und gleichmäßig.

ießt man jetzt mit Leichtigkeit, daß, wie behauptet, die Reihe (119) nebst ihren Ableitungen erster Ordnung stetige Funktion darstellt.

Führt man jetzt in (117) für x_j den Wert $\bar{x}_j$, somit für Z den ziellen Wert Z^* ein, so verschwindet K_1'. Es gilt ferner

5)
$$K_2' < -\delta_5 \varepsilon^4 x_1^4, \quad K_3' < -\frac{\varepsilon^3}{2}\delta_4 \left(1 - \frac{1}{\nu_2}\right) D_T(Z^*),$$
$$|K_4'| + |K_5'| + |K_6'| < \alpha_{19}|\varepsilon|^3 D_T(Z^*) + \alpha_{20}|\varepsilon|^5 x_1^4.$$

Offenbar ist für alle hinreichend kleinen Werte $|\varepsilon|$, etwa $|\varepsilon| \leqq \varepsilon_{10} \leqq \varepsilon_0$,

6)
$$\Delta J < -\alpha_{21}\varepsilon^2 D_T(Z^*) - \alpha_{22}\varepsilon^4 x_1^4.$$

Ein Minimum tritt nicht ein.

3. Ist schließlich

7)
$$\Delta_4 - \sum{}' \frac{1}{2(\nu_j - 1)} \left(\int_T h\psi_j \, dx\, dy\right)^2 = 0,$$

bleibt es vorläufig unentschieden, ob ein Minimum eintritt oder nicht. diesem Falle wird man

8)
$$X(x, y) = \sum{}' \frac{\psi_j}{(\nu - 1)} \int_T h\psi_j \, dx\, dy = \sum{}' d_j \psi_j$$

9)
$$\zeta = x_1 \psi_j - \varepsilon x_1^2 X(x, y) + U(x, y)$$

en und die vorhin durchgeführten Betrachtungen unter Heranziehung fünften und sechsten Variation wiederholen[22]). Kommt man auch nicht zu einer Entscheidung, so wird man die nächst höheren Glieder nziehen, was in ähnlicher Weise geschehen kann.

Zweites Kapitel.

Das einfachste Problem bei freier Begrenzung.

§ 1.

Es sei $\zeta(x, y)$ irgendeine in T und auf S stetige Funktion, die in S abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat. sei ε_0 eine so kleine positive Zahl, daß für alle $|\varepsilon| \leqq \varepsilon_0$ die Fläche

$$x, y, z(x, y) + \varepsilon\zeta(x, y)$$

im Innern von $\mathfrak{R}$ liegt. Wir setzen wieder

$$\Delta J = \int_T \{f(x, y, z + \varepsilon\zeta, z_x + \varepsilon\zeta_x, z_y + \varepsilon\zeta_y) - f(x, y, z, z_x, z_y)\} \, dx\, dy$$
$$= \varepsilon J_1 + \varepsilon^2 J_2 + \varepsilon^3 J_3 + \cdots$$

[22]) Vgl. meine in Veröffentlichung begriffene Arbeit, Zur Variationsrechnung. e Mitteilung. Göttinger Nachrichten 1919, wo analoge Betrachtungen für den mensionalen Fall durchgeführt sind.

Es gilt

$$(2)\quad J_1 = \int_T \left(f_z\zeta + f_p\frac{\partial\zeta}{\partial x} + f_q\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)dx\,dy = \int_T \left(f_z - \frac{\partial}{\partial x}f_p - \frac{\partial}{\partial y}f_q\right)\zeta\,dx\,dy + \int_S \zeta\,(f_p\,dy - f_q\,dx)^{23}),$$

$$J_2 = \tfrac{1}{2}\int_T \left\{f_{pp}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 + 2f_{pq}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y} + f_{qq}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2 + 2f_{pz}\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial x} + 2f_{qz}\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial y} + f_{zz}\zeta^2\right\}dx\,dy$$

$$(3)\quad = \tfrac{1}{2}\int_T \left[a\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2 - k\zeta^2\right]dx\,dy - \tfrac{1}{2}\int_S h\zeta^2\,ds,$$

$$k = \frac{\partial}{\partial x}f_{zp} + \frac{\partial}{\partial y}f_{zq} - f_{zz}, \qquad h = -\left(f_{pz}\frac{dy}{ds} - f_{qz}\frac{dx}{ds}\right).$$

Es sei $\bar{q}$ irgendeine in T und auf S analytische und reguläre, negativ Funktion. Betrachten wir die partielle Differentialgleichung

$$(4)\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(b\frac{\partial u}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \bar{q}u + \lambda(k - \bar{q})u = 0.$$

Wie ich in der in der Fußnote [6]) genannten Arbeit bewiesen habe, h die Differentialgleichung (4) für unendlich viele Eigenwerte des Parameter λ in T und auf S stetige, in T reguläre Lösungen, die auf S der Rand bedingung

$$(5)\quad \left(-a\frac{dy}{ds} + b\frac{dx}{ds}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(-b\frac{dy}{ds} + c\frac{dx}{ds}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \lambda h u = 0$$

genügen. Im allgemeinen gibt es sowohl unendlich viele positive Eigen werte $\lambda_1 < \lambda_2 \leqq \ldots$, als auch unendlich viele negative Eigenwer $\lambda_{-1} > \lambda_{-2} \geqq \lambda_{-3} \geqq \ldots$. Es seien φ_j die zu λ_j gehörigen, den Formel

$$(6)\quad \begin{aligned} &\int_T (k - \bar{q})\varphi_j\varphi_l\,dx\,dy + \int_S h\varphi_j\varphi_l\,ds = 0, \qquad (j \neq \\ &\int_T (k - \bar{q})\varphi_j^2\,dx\,dy + \int_S h\varphi_j^2\,ds = \frac{\lambda_j}{|\lambda_j|} \end{aligned}$$

gemäß normierten Eigenfunktionen.

Es gelten die beiden Formeln

$$(7)\quad \int_T \left[a\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2 - \bar{q}\zeta^2\right]dx\,dy = \sum|\lambda_j|\left(\int_T (k - \bar{q})\zeta\varphi_j\,dx\,dy + \int_S h\zeta\varphi_j\,ds\right)^2,$$

---

[23]) In (2) sind $\frac{\partial f_p}{\partial x}, \frac{\partial f_q}{\partial y}$ zur Abkürzung für $\frac{\partial}{\partial x}f_p(x, y, z(x, y), z_x(x, y), z_y(x, y))$, gesetzt worden.

$$(k-\bar{q})\zeta^2\,dxay+\int_S h\zeta^2\,ds=\sum\frac{\lambda_j}{|\lambda_j|}\Big(\int_T(k-\bar{q})\zeta\varphi_j\,dx\,dy+\int_S h\zeta\varphi_j\,ds\Big)^2\ ^{24}).$$

Aus (3), (7) und (8) folgt

$$=\tfrac{1}{2}\int_T\Big\{\Big[a\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)^2+2b\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+c\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)^2-\bar{q}\zeta^2\Big]-(k-\bar{q})\zeta^2\Big\}dx\,dy-\tfrac{1}{2}\int_S h\zeta^2\,ds$$

$$=\tfrac{1}{2}\sum|\lambda_j|\Big(1-\frac{1}{\lambda_j}\Big)\Big(\int_T(k-\bar{q})\zeta\varphi_j\,dx\,dy+\int_S h\zeta\varphi_j\,ds\Big)^2.$$

der Formel (9) lassen sich nun Schlüsse ziehen, die den im ersten pitel gewonnenen ganz analog sind.

1. Es möge zunächst der kleinste positive Eigenwert $\lambda_1<1$ sein. zt man in (9) für ζ den Wert φ_1 ein, so findet man

$$J_2=\tfrac{1}{2}(\lambda_1-1)<0.$$

Für alle hinreichend kleinen Werte von ε ist, wie man leicht sieht, ζ gleich φ_1 auch

$$\Delta J<0.$$

Damit das Minimum eintreten kann, ist daher notwendig, daß

$$\lambda_1\geqq 1$$

Diese notwendige Bedingung ist der im ersten Kapitel für das einhste Problem bei festem Rand aufgestellten Bedingung ganz analog.

2. Es sei jetzt insbesondere $\lambda_1>1$.

Aus (9) folgt, wie in § 1 des ersten Kapitels,

$$J_2\geqq\tfrac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{\lambda_1}\Big)\int_T\Big[a\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)^2+2b\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+c\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)^2-\bar{q}\zeta^2\Big]dx\,dy.$$

Sind alle Eigenwerte negativ, in welchem Falle wir $\lambda_1=+\infty$ setzen, gilt

$$J_2\geqq\tfrac{1}{2}\int_T\Big[a\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)^2+2b\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+c\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)^2-\bar{q}\zeta^2\Big]dx\,dy.$$

genscheinlich ist $J_2=0$ nur für $\zeta\equiv 0$.

Wie in § 1 des ersten Kapitels findet man

$$\Delta J=\varepsilon^2J_2+\varepsilon^3\hat{J}_3,$$

---

[24]) Im allgemeinen gilt in der Formel (7) das Zeichen $\geqq$. Ist eine gewisse dratische Form mit unendlichen vielen Variablen abgeschlossen, so tritt in (7) Gleichheitszeichen (vgl. loc. cit. [6]) S. 157). Im vorliegenden Falle, wo die ktionen $f(x,y,z,p,q)$ und $\bar{q}$ analytisch und regulär sind, ist jene Bedingung, sich ohne wesentliche Schwierigkeiten zeigen läßt, erfüllt. Die weiteren Schlußerungen gelten übrigens unverändert, auch wenn man in (7) das Gleichheitszeichen ch das Zeichen $\geqq$ ersetzt.

) $|\hat{J}_3| < \alpha_{23} \int_T \left[\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2 + \zeta^2 \right] dx\,dy < \alpha_{24} \int_T \left[a \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + 2b \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2 - \bar{q} \zeta^2 \right]$

darum

$$(16) \quad |\Delta J| \geqq \frac{\varepsilon^2}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_1} - 2\varepsilon \alpha_{24}\right) \int_T \left[a \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + 2b \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2 - \bar{q} \zeta^2 \right] dx\,dy,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für $\zeta \equiv 0$ gilt.

Für $\lambda_1 > 1$ liegt zunächst ein schwaches Minimum vor.

Es macht nunmehr keine Schwierigkeiten zu beweisen, daß starkes Minimum in einem sogleich näher zu präzisierenden Sinne vorliegt.

Man sieht vor allem leicht ein, daß der zu dem ersten Randwert problem gehörige kleinste positive Eigenwert der Differentialgleichung (größer als 1 ist. Andernfalls würde nämlich die zweite Variation ver schwinden können, ohne daß notwendigerweise $\zeta \equiv 0$ wäre[25]). Die Fläch $x, y, z(x, y)$ läßt sich demnach in ein Feld von Extremalflächen einbetten

Es sei jetzt $\hat{\chi}(s)$ irgendeine nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige, den Beziehungen

$$(17) \quad \begin{aligned} &|\hat{\chi}(s)|, \quad \left|\frac{d\hat{\chi}(s)}{ds}\right|, \quad \left|\frac{d^2\hat{\chi}(s)}{ds^2}\right| < M, \\ &\left|\frac{d^2}{ds^2}\chi(s+h) - \frac{d^2}{ds^2}\chi(s)\right| < M|h|^\mu \qquad (0 < \mu \leq 1 \end{aligned}$$

genügende Funktion. Es sei ferner $\hat{\zeta}(x, y)$ irgendeine in $T + S$ stetig Funktion, die folgende Eigenschaften hat.

1. Sie hat in $T + S$ abteilungsweise stetige Ableitungen erster Ordnung
2. Sie ist auf S gleich $\varepsilon \hat{\chi}(s)$ und genügt in $T + S$ der Ungleichhei

$$(18) \quad |\hat{\zeta}(x, y)| < \varepsilon M.$$

Dann ist

$$(19) \quad \int_T f(x, y, z + \hat{\zeta}, z_x + \hat{\zeta}_x, z_y + \hat{\zeta}_y)\,dx\,dy \geqq \int_T f(x, y, z, z_x, z_y)\,dx\,dy.$$

Wie wir in §§ 2 und 3 des ersten Kapitels bewiesen haben, gibt ε für alle $|\varepsilon| \leqq \varepsilon_4$ eine Extremalfläche, sie heiße $z(x, y) + \zeta^*(x, y)$, di auf S den Wert $z(x, y) + \hat{\zeta}(x, y)$ annimmt. Die Flächen $z(x, y) + \hat{\zeta}(x, y$ und $z(x, y) + \zeta^*(x, y)$ haben dieselbe Randkurve. Für hinreichend klein Werte von $|\varepsilon|$ läßt sich $z(x, y) + \zeta^*(x, y)$ in ein Feld von Extrema flächen einbetten. Ist $|\varepsilon| \leqq \varepsilon_8$, so liegt, wie auch die den Beziehunge (17) genügende Funktion $\hat{\chi}(s)$ beschaffen sei, die Fläche $z(x, y) + \hat{\zeta}(x, y$

[25]) Vgl. die Bemerkung am Schluß des § 1 des ersten Kapitels.

z im Innern dieses Feldes. Da, wie soeben bewiesen, gewiß schwaches imum bei freiem Rand vorliegt, so ist

$$\int_T f(x, y, z, z_x, z_y)\,dx\,dy \leqq \int_T f(x, y, z+\zeta^*, z_x+\zeta_x^*, z_y+\zeta_y^*)\,dx\,dy.$$

Aus den Resultaten des ersten Kapitels folgt ferner

$$, y, z+\zeta^*, z_x+\zeta_x^*, z_y+\zeta_y^*)\,dx\,dy \leqq \int_T f(x, y, z+\hat{\zeta}, z_x+\hat{\zeta}_x, z_y+\hat{\zeta}_y)\,dx\,dy.$$

o ist in der Tat für alle den Beziehungen (17) genügenden Rand-ktionen $\hat{\chi}(s)$ gleichmäßig

$$\int_T f(x, y, z, z_x, z_y)\,dx\,dy \leqq \int_T f(x, y, z+\hat{\zeta}, z_x+\hat{\zeta}_x, z_y+\hat{\zeta}_y)\,dx\,dy.$$

Gleichheitszeichen gilt hier nur für $\hat{\zeta} \equiv 0$.

Berlin, den 13. März 1919.

(Eingegangen am 13. März 1919.)

Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von

R. v. Mises in Dresden.

Übersicht.

Einleitung.
§ 1. Grundbegriffe (Satz 1—7).
§ 2. Die Beziehungen zur Erfahrungswelt.
§ 3. Die Verteilungen (Satz 8—14).
§ 4. Die einfachen Operationen (Satz 15—22).
§ 5. Zusammengesetzte Operationen (Satz 23—27).
§ 6. Die Gesetze der großen Zahl (Satz 28—30).

Im folgenden lege ich die zusammenfassende Darstellung der Grun lagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung vor, die ich in meiner Arbeit üb die „Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung" angekündi habe[1]). In einem dritten, abschließenden Aufsatz über die „Hauptsäc lichsten Problemgruppen der Wahrscheinlichkeitsrechnung" soll dann g zeigt werden, wie sich auf diesen Grundlagen, teilweise unter Heranziehu der Fundamentalsätze, die Theorie der Glückspiele, der statistischen u der physikalischen Anwendungen aufbauen läßt.

Dem Bedürfnis nach einer exakten Grundlegung der Wahrscheinlic keitsrechnung wird sich kein Mathematiker verschließen, der eines d bestehenden Lehrbücher zur Hand nimmt: in der Tat kann man d gegenwärtigen Zustand kaum anders als dahin kennzeichnen, daß d Wahrscheinlichkeitsrechnung heute *eine mathematische Disziplin nicht i* Kein Autor erhebt sich wesentlich über die Auffassung der von Lapla herrührenden „*Definition*", die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses der Quotient aus der Anzahl der „dem Ereignis günstigen Fälle" dur

---

[1]) Diese Zeitschrift 4 (1919), S. 1—97. Hinfort zitiert als „Fundamentalsätz

aller „gleichmöglichen Fälle“[2]). Ganz abgesehen von der hier eingeossenen petitio principii — denn „gleichmöglich“ kann wohl nichts eres heißen als „gleich wahrscheinlich“ — ist die übliche Darstellung t davon entfernt, diesen Satz, soweit ihm überhaupt ein exakter Sinn ommt, als Begriffsbestimmung für das im weiteren Verlaufe „Wahrinlichkeit“ Genannte aufrechtzuerhalten. Wie soll man auch etwa Wahrscheinlichkeit, mit einem *falschen* Würfel sechs zu werfen, wie Lebens- oder Sterbens-Wahrscheinlichkeit dieser „Definition“ unternen[2a]), und was ist es mit der Wahrscheinlichkeit der „Ursachen, Hypoen und künftigen Ereignisse“, die eine so ganz abgesonderte Stellung den üblichen Entwicklungen einnimmt? — Aber nicht nur die Defion, auch die grundsätzliche *Problemstellung* der Wahrscheinlichkeitsnung ist in tiefes Dunkel gehüllt, wie man an zahlreichen sogenannten adoxien (z. B. dem Bertrandschen Paradoxon, vgl. § 2 u. 4), an Meigsverschiedenheiten in offenkundig ganz einfachen Fällen (dem „Petersger“ Problem, der Frage nach den „reinen Gruppen“, § 5), am Aufen scheinbar völlig neuer Fragen (Borel[3])) erkennt.

Die bisher unternommen Versuche einer mathematischen Begründung Wahrscheinlichkeitsrechnung (Bohlmann[4]), Broggi[5]), Borel[3])) scheinen durchaus im *Formalen* stecken geblieben zu sein. Die vorliegende stellung geht von der Auffassung aus, daß die Wahrscheinlichkeitsnung eine *Naturwissenschaft gleicher Art wie die Geometrie* oder die oretische Mechanik ist. Sie hat das Ziel, die Zusammenhänge und ängigkeiten bestimmter, beobachtbarer Erscheinungen wiederzugeben, t als getreues Abbild der Außenwelt, sondern als deren Abstraktion Idealisierung. Sie muß von logisch eindeutigen Begriffskonstruktionen gehen, bei deren Aufbau die Rücksicht auf das darzustellende Objekt Außenwelt maßgebend ist; ist aber einmal der Aufbau durch ein

[2]) Gedanken, die als eine Überleitung zu dem in dieser Arbeit eingenommenen dpunkt aufgefaßt werden können, finden sich bei A. A. Cournot, Exposition de héorie des chances et des probabilités, Paris 1843, deutsch von C. Schnuse, nschweig 1849. Vgl. auch die Darstellung von J. le Roux in der Enc. d. mathém. vol. 4, art. I, 20, p. 1. Vielfache Anregung verdankt der Verfasser der originel-Darstellungsweise von H. Bruns, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivlehre, Leipzig 1906.

[2a]) Diese Unmöglichkeit hinsichtlich der Lebens- und Sterbens-Wahrscheinlichbetont neuerdings L. v. Bortkiewicz, Jahresber. d. deutsch. Math. Verelnigung 1918), S. 71—126. Es heißt hier S. 109: „Ja, in der Statistik ist man nicht ein- in der Lage, mit den Ausdrücken ‚gleichmögliche Fälle‘ und ‚günstige Fälle greifbare Vorstellungen zu verbinden.“

[3]) Rendicondi del Circolo Matematico di Palermo 27 (1909), S. 247—271.

[4]) Enzykl. d. math. Wiss. Bd. I, Art. D 4b, S. 859.

[5]) Die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Inaug.-Diss. Göttingen 1907.

Axiomensystem erfolgt, so werden auf rein deduktivem Wege die Ergeb
nisse gewonnen, deren Anwendbarkeit auf die Gegenstände der Erfahrun
allein über die *praktische* Brauchbarkeit der Theorie entscheidet.

Der wesentlichste Teil unserer Neuaufstellungen, das *Axiomensyste*
mit den wichtigsten unmittelbaren Folgerungen, sowie die *Formulierun*
der allgemeinen Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind in § 1 s
knapp als möglich dargestellt; eine auszugsweise Wiedergabe an diese
Stelle kann daher unterbleiben. Es mag nur bemerkt werden, daß di
Darstellung sich äußerlich von der üblichen Form der Axiomatik dadurc
unterscheidet, daß auf eine weitgehende Zergliederung der Voraussetzunge
verzichtet wurde, diese vielmehr in nur *zwei Axiomen* oder „Forderungen
zusammengefaßt erscheinen. Ein derartiger Vorgang schien mir dem Stan
der Dinge besser angepaßt zu sein. Als den entscheidendsten Punkt be
trachte ich die Voranstellung des Begriffes „*Kollektiv*" vor den der Wah
scheinlichkeit, wobei das, was hier als „Kollektiv" bezeichnet wird, ein ne
geschaffener, exakter Begriff ist, der etwa als mathematische Präzisierun
des Fechner-Brunsschen „Kollektiv-Gegenstandes" angesehen werde
kann. In § 2, der den Fortgang der eigentlichen Theorie unterbrich
werden die *Beziehungen* der in § 1 aufgestellten Sätze *zu den wirkli*
beobachtbaren Erscheinungsreihen erörtert und die Anwendungsgebiete de
Theorie, die alle bisher behandelten praktischen Probleme umfassen, al
gegrenzt; nur eine bestimmte, gelegentlich untersuchte, Klasse „mathe
matischer" Wahrscheinlichkeiten müssen wir aus prinzipiellen Gründe
ausscheiden. Der folgende § 3 bringt einige rein analytische Ausführunge
über „*Verteilungen*", die nur der Kürze wegen in großer Allgemeinhei
unter Verwendung einiger *mengentheoretischer* Begriffe gefaßt sind. We
dieser Standpunkt starker Verallgemeinerung nicht zusagt, wird ohn
Schwierigkeit über die Sätze 8 bis 12 hinweglesen können und sich dami
begnügen, in den Sätzen 13 und 14 die praktisch allein in Betracht kom
menden Sonderfälle der *arithmetischen* und der *geometrischen Verteilun*
zur Kenntnis zu nehmen. Einen Schritt weiter im Aufbau unseres System
bedeutet § 4, in dem die sog. *einfachen Operationen* zur Ableitung neue
Kollektivs aus gegebenen besprochen werden; damit schließt zugleich jen
Teil der Arbeit, der die Grundlagen im engern Sinn umfaßt. Um, w
billig, einen Begriff davon zu geben, wie sich die Verwertung dieser
Grundlagen gestaltet, werden zunächst in § 5 einige typische Fälle z
sammengesetzter Operationen behandelt, dazu beispielsweise das Peter
burger Problem, die Marbesche Frage nach den „reinen Gruppen" erledi
und die prinzipiell wichtigen Operationen der „linearen Faltung" und de
, ,linearen Kreuzung" definiert. Dies und der Inhalt des letzten § 6 „*d*
Gesetze der großen Zahl", berührt sich mit gewissen in meiner Arbe

er die Fundamentalsätze erzielten Ergebnissen, die hier neu — unabngig von den Fundamentalsätzen — abgeleitet erscheinen: diese Ausrungen durften nicht fehlen mit Rücksicht auf die bisher ganz ungerte Stellung, die das bekannte Gesetz der großen Zahl im Rahmen der ndlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung einnimmt.

Zu den zahlreichen mehr *philosophisch* gerichteten Schriften über hrscheinlichkeitsrechnung, unter denen die von Joh. v. Kries[6]) die benteste ist, hat die vorliegende Arbeit naturgemäß keine unmittelbaren ziehungen. Sie hofft aber, durch die eindeutige Grundlegung der hrscheinlichkeitsrechnung *als einer mathematischen Disziplin* den ßten Teil jener Erörterungen überflüssig gemacht zu haben, namentn jene stets besonders umfangreichen Überlegungen, die sich mit dem . Problem der „Gleichmöglichkeit" beschäftigen. Auch auf die *physische* Erklärung des Zustandekommens von Wahrscheinlichkeits-Erscheingen, wie sie von M. v. Smoluchowski kürzlich in bemerkenswerter ise gegeben wurde[7]), kann und soll in diesem Rahmen nicht eingegen werden.

§ 1. Grundbegriffe.

Es sei (c) eine unendliche Folge gedachter Dinge, die wir kurz als lemente" $e_1, e_2, e_3 \ldots$ bezeichnen. Jedem Element sei als „Merkmal" bestimmtes Wertsystem der k reellen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ r ein Punkt des k-dimensionalen „Merkmalraumes" zugeordnet, wobei ht alle Elemente und auch nicht alle bis auf endlich viele dasselbe Merkl aufweisen sollen. Wir nennen eine solche Folge von Elementen ein ollektiv" (d. i. Sammelgegenstand) K, wenn die Zuordnung der Merkle an die einzelnen Elemente den nachfolgend angeführten Forderungen iomen) I und II genügt.

Forderung I. Existenz der Grenzwerte. *Sei A eine beliebige nktmenge des Merkmalraumes und N_A die Anzahl derjenigen unter n ersten N Elementen der Folge, deren Merkmal ein Punkt von A ist; n existiere für jedes A der Grenzwert*

$$\lim_{N=\infty} \frac{N_A}{N} = W_A.$$

esen Grenzwert nennen wir — vorausgesetzt, daß auch die Forderung II üllt ist — die „*Wahrscheinlichkeit* für das Auftreten eines zu A gerigen Merkmales *innerhalb des Kollektivs K*". Einen anderen Wahr-

[6]) Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Freiburg i. B. 1886.
[7]) Die Naturwissenschaften **6** (1918), S. 253 (Planck-Heft).

scheinlichkeitsbegriff als diesen gebrauchen wir nicht. Zur Abkürzung nennen wir gelegentlich auch W_A die „Wahrscheinlichkeit von A“, sobald über das Kollektiv, innerhalb dessen diese Wahrscheinlichkeit besteht, kein Zweifel möglich ist.

Aus der Definition ergeben sich sofort die beiden Sätze:

Satz 1. *Die Wahrscheinlichkeit ist eine reelle Zahl des abgeschlossenen Intervalls* 0, 1.

Satz 2. *Die Wahrscheinlichkeit innerhalb eines bestimmten Kollektivs ist eine für alle Punktmengen des Merkmalraums definierte, additive Mengenfunktion, d. h. es gilt*

$$W_A + W_B = W_{A+B}, \tag{2}$$

wenn die Mengen A und B keine gemeinsamen Punkte haben und $A + B$ ihre Vereinigungsmenge bedeutet.

Die Menge M aller Punkte, die mindestens einem Element als Merkmal zugeordnet sind, oder überhaupt als Merkmale auftreten können, heiße die *Merkmalmenge*. Sie ist niemals leer, kann den ganzen Merkmalraum umfassen und sich auf zwei einzelne Punkte reduzieren. Immer gibt es mindestens zwei nicht leere Teilmengen von M, denen je unendlich viel Punkte entsprechen und unter diesen mindestens eine, für die W_A von null verschieden ist. — Die Gesamtheit der W_A-Werte für alle Punktmengen A des Merkmalraumes bildet die *Verteilung*; es genügt dabei, nur solche A zu betrachten, die Teilmengen von M sind. Man kann sich die Funktion W_A unter dem Bilde einer (teils stetigen, teils unstetigen) *Verteilung der Masse* 1 über die Punkte von M vorstellen.

Wenn die Merkmalmenge M aus nur zwei Punkten a und b besteht, pflegt man W_a als die Wahrscheinlichkeit für das „Eintreffen von a“, W_b als die für das „Nicht-Eintreffen von a“, das Kollektiv selbst als eine *einfache Alternative* zu bezeichnen. Aus der Definition von W_A ergibt sich, daß in diesem Falle $W_a + W_b = 1$ und allgemein:

Satz 3. *Für jede Menge A, die sämtliche Punkte der Merkmalmenge M enthält, ist $W_A = 1$; für jedes A, das keinen Punkt mit M gemein hat, ist $W_A = 0$.* Hingegen gilt die Umkehrung nicht, d. h. $W_A = 0$ ist nicht immer gleichbedeutend mit „Unmöglichkeit“, $W_A = 1$ nicht immer mit „Sicherheit“ von A[8]).

---

[8]) Diese scheinbar nicht unwesentliche Abweichung gegenüber der üblichen Theorie ist tatsächlich ganz unerläßlich (und schon gelegentlich ausgesprochen), wenn man irgendwelche Fälle *stetiger* Verteilungen in Betracht zieht. Z. B. hat in der Gaußschen Fehlertheorie jede Fehlergröße die Wahrscheinlichkeit null, aber jede Fehlergröße ist möglich.

Forderung II. Regellosigkeit der Zuordnung. *Seien A und B i Punktmengen des Merkmalraumes ohne gemeinsame Punkte und nach* (1) *gebildeten Grenzwerte* W_A *und* W_B *nicht beide null. Aus Folge aller Elemente* (e) *von K streichen wir zunächst alle jene, die n zu A oder zu B gehöriges Merkmal aufweisen, und versehen übrigen mit den Indizes* $1, 2, 3, \ldots$ *Aus der so entstandenen unend-en Folge werde eine unendliche Teilfolge* (e') *dadurch ausgewählt, über die Indizes der auszuwählenden Elemente ohne Benützung ihrer rkmalunterschiede verfügt wird; dann sollen innerhalb der Teilfolge* (e') *nach* (1) *gebildeten Grenzwerte* W'_A *und* W'_B *existieren und der lingung*

$$W'_A : W'_B = W_A : W_B$$

ügen.

Als einfache *Verfahren der Auswahl* zur Bildung von Teilfolgen im ne dieser Forderung, d. i. „ohne Benützung der Merkmalunterschiede auszuwählenden Elemente", kommen folgende in Betracht:

a) Durch eine *arithmetische Vorschrift* kann eine unendliche Folge irlicher Zahlen für die Indizes der auszuwählenden Elemente festge- werden; z. B. alle Zahlen von 101 an, jede durch 6 teilbare Zahl, Zahlen, denen eine Primzahl vorangeht.

b) Durch die Zuordnung der Merkmale innerhalb eines *anderen lektivs* K' kann eine unendliche Zahlenfolge bestimmt werden; z. B. Zahlen α, für die das Element e'_α von K' ein der gegebenen Punkt-ge A' angehöriges Merkmal aufweist.

c) Durch die Zuordnung der Merkmale innerhalb *des betrachteten eines zweiten Kollektivs* in Verbindung mit einer *arithmetischen schrift* läßt sich eine Auswahl vornehmen; z. B. alle geraden Zahlen 2α, die das Element e_α von K selbst ein bestimmtes Merkmal aufweist.

Diese einfachen Auswahl-Verfahren können an einer Elementenfolge wiederholt und in verschiedener Kombination angewendet werden; : Man bildet (e') aus (e) durch Streichung jedes zweiten Elementes, lt dann nur die Elemente e'_α, für die das Element E_α eines anderen ektivs das Merkmal A besitzt, und gewinnt so (e''), behält wieder diejenigen e''_α für die das Merkmal von E_α nach B fällt usf. Wir ichnen jede solche Auswahl, die ohne Benützung der Merkmalunter-ede der auszuwählenden Elemente eine unendliche Teilfolge erzeugt, eine „zulässige" Auswahl. Die Forderung II besagt dann, daß durch „zulässige Auswahl" die Verhältnisse der Grenzwerte W nicht ge-rt werden.

Eine den Forderungen I und II genügende Zuordnung zwischen de Elementen einer unendlichen Folge (den Zahlen der natürlichen Zahle reihe) und den Punkten des k-dimensionalen Raumes nennen wir ei *zufallsartige*. Wir können daher auch sagen: *Ein Kollektiv ist eine u endliche Folge von Elementen mit zufallsartiger Zuordnung von Mer malen an die einzelnen Elemente.*

Der wesentlichste Inhalt der Forderung II wird erkennbar, sobald w den Sonderfall ins Auge fassen, daß die beiden Mengen A und B zur Ve einigungsmenge die *ganze* Merkmalmenge M besitzen. Es folgt dann a Satz 3 in Verbindung mit (2), daß

$$W_A + W_B = W'_A + W'_B = 1,$$

daher aus (3):

$$W_A = W'_A, \quad W_B = W'_B, \tag{4}$$

d. h. die neue Verteilung ist der ursprünglichen gleich. Nun wird h die Teilfolge (e') der Forderung II unmittelbar durch eine zulässi Auswahl aus der *ursprünglichen* Elementfolge (e) gebildet. Da aber je weitere zulässige Auswahl aus (e') auch eine zulässige Auswahl aus ist, so muß man schließen, daß wenn die Zuordnung der Merkmale inn halb (e) den Forderungen I und II genügt, dies auch für die Zuordnu innerhalb (e') gilt, mit anderen Worten: die durch zulässige Auswahl e standene Elementenfolge (e') bildet wieder ein Kollektiv mit der gleich Verteilung wie das ursprüngliche. Wir haben so den

Satz 4. *Wird aus der Elementenfolge* (e) *eines Kollektivs K e unendliche Teilfolge* (e') *durch Auswahl ohne Benutzung der Merkm unterschiede der auszuwählenden Elemente gebildet und das Merkm jedes Elementes unverändert gelassen, so entsteht ein neues Kollektiv dessen Verteilung der des Kollektivs K gleich ist.*

So kann man beispielsweise aus einem Kollektiv zwei neue gewinn indem man einmal alle Elemente mit geradem, dann die mit ungerad Index für sich nimmt; nach Satz 4 sind die Wahrscheinlichkeiten innerh der neuen Kollektivs gleich denen innerhalb des ursprünglichen. Es leuch ein, daß ein solches Verhalten nur möglich ist, wenn die Zuordnung Merkmale keinem arithmetischen Gesetz folgt, also „regellos" ist (vgl Satz 5). Denkt man an die Anwendung bei Glückspielen, wo es ein altersher verfolgtes Problem ist, durch ein „Spielsystem" seine Gewin chancen zu verbessern, so kann man unsere Forderung II auch als das *Ax von der Unmöglichkeit eines Spielsystems* bezeichnen.

Das in Satz 4 beschriebene Verfahren der „*Auswahl*" ist nur einfachste Beispiel für die *Ableitung neuer Kollektivs aus gegeben*

: werden in den §§ 4 und 5 weitere Einzelfälle und den systematischen
bau dieser Ableitungen kennen lernen und jedesmal zeigen, wie man
Verteilung des neu gebildeten Kollektivs aus denen der gegebenen be-
nnen kann. In diesen Berechnungen und der Untersuchung der damit
ammenhängenden Fragen erblicken wir die *ausschließliche* Aufgabe der
hrscheinlichkeitsrechnung, und erhalten so folgende

Formulierung der Fragestellung. *Aus gegebenen Kollektivs lassen
i in vielfacher Weise, z. B. durch Transformation der Merkmale, durch
mbination der Elemente, verschiedene Auswahl oder Zusammenfassung
., neue Kollektivs ableiten; es ist die Aufgabe der Wahrscheinlichkeits-
hnung, aus den gegebenen Verteilungen der ursprünglichen Kollektivs
der abgeleiteten zu berechnen.*

Wir fügen noch zur näheren Erläuterung der mit II geforderten
egellosigkeit der Zuordnung" folgendes hinzu. Man könnte nach einem
spiel einer der Forderung II genügenden Zuordnung fragen, etwa indem
n eine vollständige Angabe verlangt, die gestattet, zu jedem Index α
dem Element e_α zugeordnete Merkmal explizite zu finden. Dem-
enüber erklären wir:

Satz 5. *Ein Kollektiv wird durch seine Verteilung vollkommen be-
nmt; die vollständige Angabe der Zuordnung im einzelnen ist nicht
glich.*

Denn durch eine endliche Aufzählung kann die Angabe der Zuordnung
halb nicht erschöpft werden, weil — wie schon oben festgestellt —
ndestens zwei Punktmengen A und B ohne gemeinsame Punkte be-
hen, denen je unendlich viel Elemente entsprechen. Es bleibt also
die Möglichkeit der Angabe durch eine Rechnungsvorschrift, etwa
$= f_\varkappa(\alpha)$, $\varkappa = 1, 2, 3, \ldots, k$, wo die $f_\varkappa$ reelle, für alle positiven ganzen α
inierte Funktionen bedeuten. Seien nun A und B zwei Punktmengen
genannten Art und überdies $W_B > 0$. Läßt man in den Gleichungen

$$f_\varkappa(\alpha) = a_\varkappa, \qquad \varkappa = 1, 2, \ldots, k,$$

$a_\varkappa$ alle Koordinatenwerte der Punkte von A durchlaufen, so wird
ch (5) eine unendliche Folge von Zahlen α bestimmt, die eine Teil-
ge (e') der Folge (e) nach dem ersten der drei oben angeführten Aus-
hlverfahren liefert. Für diese Teilfolge wäre aber $W_B' = 0$, weil in (e')
n Element mit einem nach B fallenden Merkmal vorkommt. Darin
gt wegen $W_B > 0$ ein Widerspruch gegenüber Forderung II bzw. Satz 4. —
alog besteht folgender

Satz 6. *Die Zuordnung der Merkmale innerhalb zweier Kollektivs
t gleicher Verteilung (also auch mit derselben Merkmalmenge) ist an*

unendlich viel Stellen verschieden. (Für Kollektivs mit ungleicher Ve teilung ist die Aussage trivial.)

Sei im Merkmalraum der beiden gegebenen Kollektivs B eine Punk menge, für die $W_B > 0$, und A die Komplementärmenge von B. Aus d Elementenfolge (e) des ersten Kollektivs bilden wir nach dem zweiten d angeführten Auswahlverfahren eine Teilfolge (e'), indem wir nur diejenig Elemente e_α von (e) beibehalten, für die das Element von gleichem Ind E_α des zweiten gegebenen Kollektivs einen Punkt von A zum Merkm hat. Wären die Zuordnungen innerhalb (e) und (E) nur an endlich v Stellen verschieden, so könnten in (e') höchstens endlich viele Elemer mit einem Punkt von B als Merkmal vorkommen. Dann wäre aber W'_B (e') wieder $W'_B = 0$ im Widerspruch zu Forderung II und Satz 4.

In gleicher Weise beweist man, mit Rücksicht auf die dritte der ob angeführten drei Arten „zulässiger" Auswahl:

Satz 7. *Die innerhalb eines Kollektivs bestehende Zuordnung l sich nicht durch eine im einzelnen angebbare Transformation aus Zuordnung innerhalb eines andern Kollektivs herleiten.*

Durch die Forderungen I und II und die sie erlauternden Sätze bis 7 wird das, was wir im Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung un *Kollektiv* verstehen, und zugleich unser *Wahrscheinlichkeitsbegriff* v ständig bestimmt. Satz 5 besagt, daß man die „Existenz" von Kollekt nicht durch eine analytische Konstruktion nachweisen kann, so wie m etwa die Existenz stetiger, nirgends differenzierbarer Funktionen nachwe Wir müssen uns mit der abstrakten *logischen Existenz* begnügen, die all darin liegt, daß sich mit den definierten Begriffen widerspruchsfrei operie läßt. Auf die Frage der *Zweckmäßigkeit* der Definitionen kommen im folgenden Paragraph zurück.

§ 2. Die Beziehungen zur Erfahrungswelt.

Den im § 1 definierten Begriffen des Kollektivs, der zufallsarti Zuordnung und der Wahrscheinlichkeit entsprechen in der Erfahrungsw ganz bestimmte *beobachtbare Erscheinungen*, als deren Abstraktion o Idealisierung jene Begriffe gelten wollen. Der Zusammenhang zwisc unseren Definitionen und der Wirklichkeit ist derselbe wie der zwisc geometrischen Begriffen wie Körper, Fläche, Linie usf. und den ih entsprechenden Gebilden des empirischen Raumes.

Als erstes Beispiel eines „empirischen" Kollektivs betrachten wir folgenden Fall. Es sei ein Körper, der mehr oder weniger genau Gestalt eines kleinen Würfels besitzt, an seinen sechs ebenen Seitenfläc mit den Zahlen 1 bis 6 beschrieben. Der Körper wird in einen Be

gt und aus diesem auf den Tisch geworfen; sobald er zur Ruhe gelangt, heint eine der sechs Zahlen auf der Oberseite. Wir nennen jeden dergen Wurf ein Element und die dabei sichtbar werdende Zahl das kmal dieses Elementes. Der Merkmalraum ist also hier eindimensional die Merkmalmenge besteht aus den sechs Punkten mit den Koordinaten ,..., 6. Zwei Erfahrungstatsachen sind durch unzählige Beobachtungen längeren Serien von Würfen festgestellt:

Die Erfahrung lehrt erstens, daß, sobald nur die Zahl der Würfe hinhend groß ist, *die relative Häufigkeit jedes der sechs Merkmale anernd konstant bleibt.* Man macht die Beobachtung gewöhnlich an m sog. „richtigen" Würfel, d. h. bei einem, der möglichst genau, nach talt und Massenverteilung, die Würfelsymmetrie besitzt, und bei dem daher aus Symmetriegründen jede der sechs Konstanten gleich, also Betrage $\frac{1}{6}$, herausstellen muß. Aber auch mit Würfeln, die dieser ingung nicht entsprechen, sind Versuche angestellt worden, die unsere auptung bestätigen[9]). Wie groß die annähernd konstant bleibenden tiven Häufigkeiten sind, ist für uns hier ganz gleichgültig; es genügt, man in dem Verlauf der Häufigkeitszahlen bei wachsender Zahl der fe immer ein Verhalten erkennt, das in der Annahme der *Existenz s Grenzwertes* für eine ins Unendliche ausgedehnte Wurfreihe einen emessenen Ausdruck findet.

Die zweite Erfahrung, die wir heranziehen, um auch die zweite an Kollektiv gestellte Forderung zu begründen, besteht darin, daß die ähernde Konstanz der relativen Häufigkeiten bei genügend großer Bechtungsreihe *fortbesteht*, und zwar mit unveränderten Werten der Konten, sobald *nicht alle Würfe*, sondern z. B. nur jeder dritte, oder alle 101. an betrachtet werden, oder jene, die etwa durch einen zweiten rfel „ausgelost" werden. Aber nicht nur dies, man weiß auch, daß Häufigkeits*verhältnis* zweier Merkmale bei einer solchen Auswahl undert bleibt, wenn man alle Würfe, die andere als diese beiden Merke aufweisen, von vornherein aus der Betrachtung ausschließt. Mit eren Worten heißt das: die Chancen zweier Spieler, die etwa auf die len 1 und 6 setzen, ändern sich nicht, wenn sie, ohne die Wurfergebe vorher zu kennen, aus der Gesamtheit aller Würfe irgendeine — ügend große — Gruppe von Würfen herausgreifen. In einer besondern m (der Nichtbeachtung der bis zu einem gewissen Zeitpunkt vergange- Spiele) liegt ja diese Erkenntnis *jeder* praktischen Anwendung des hrscheinlichkeitsbegriffes zugrunde. Diesem allgemeinen Erfahrungs-

[9]) Z. B. die Versuche von R. Wolf, vgl. E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung, d. 3. Aufl., Leipzig 1914, S. 167.

ergebnis der *Unabhängigkeit der Chancen von einer „zulässigen" Auswa* aus der Gesamtheit der Spiele haben wir in unserer Forderung II Au druck gegeben.

Unsere Definition der Wahrscheinlichkeit hat nichts gemein mit d von Laplace herrührenden, heute allgemein verwendeten, die von d Betrachtung sog. gleichmöglicher Fälle ausgeht. Nach Laplace ist d Wahrscheinlichkeit der Quotient zweier endlicher Zahlen, der „dem Ereign günstigen Fälle" durch alle „gleichmöglichen" Fälle. Bei einem *richtige* Würfel bilden die sechs Seiten ebensoviel gleichmögliche Fälle, und d Wahrscheinlichkeit, die Zahl sechs zu werfen, wird daher 1 : 6, die Wah scheinlichkeit, eine gerade Zahl zu werfen, gleich 3 : 6. Der Fall ein *falschen* Würfels ist dieser Definition überhaupt nicht zugänglich, ebe sowenig wie irgendeine Aufgabe der Statistik[9a]). Im Rahmen unserer En wicklungen erscheint die Zurückführung auf gleichmögliche Fälle, sow sie überhaupt durchführbar und sachgemäß ist, als ein ganz spezielles Be spiel einer *Berechnung* von Wahrscheinlichkeiten im Sinne der in § 1 fo mulierten allgemeinen Aufgabe (vgl. § 4, Satz 17).

Die Feststellung, ob ein Würfel „richtig" ist, bzw. wie groß d Wahrscheinlichkeiten $W_1, W_2, \ldots, W_6$ seiner einzelnen Seitenflächen sin ist nach unserer Auffassung so wenig eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeit rechnung wie die Messung der Geschwindigkeit eines bewegten Körpe eine Aufgabe der theoretischen Mechanik. Derartige Feststellungen sin Sache des Versuches und können mit größerer oder geringerer, jedenfa begrenzter, Genauigkeit erfolgen. Eine Aufgabe der Wahrscheinlichkei rechnung liegt erst dann vor, wenn *gewisse Wahrscheinlichkeiten gegeb* oder als gegeben vorausgesetzt sind und *andere berechnet* werden solle So kann man beispielsweise in unserm Würfelproblem, sobald für die bis W_6 bestimmte Zahlen (mit der Summe 1) angenommen wurden, na der Wahrscheinlichkeit dafür fragen, zweimal hintereinander die Zahl 6 treffen. Die theoretische Mechanik beantwortet eben auch nicht die Fra wie sich ein bestimmter Körper zu einer bestimmten Zeit bewegt (obw man von der astronomischen Mechanik aus zu diesem Fehlschluß verlei werden könnte), sondern sie lehrt, aus gegebenen Anfangsgeschwindigkeit usw. den Zustand zu einer bestimmten Zeit zu berechnen. Ebenso hä etwa die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die von einem festen Punkt einem Kreis vom Radius a gezogene Sehne länger als $a\sqrt{3}$ ausfä (Bertrandsches Problem), von den Annahmen ab, die über die Wa scheinlichkeit des Sehnenziehens gemacht werden[10]). Hier liegt, we verschiedene Resultate auftreten, so wenig ein *Paradoxon* vor, wie in

[9a]) Vgl. hierzu L. v. Bortkiewicz l. c. [9a]), S. 109ff.

[10]) Vgl. z. B. E. Czuber, loc. cit. [9]) S. 116.

metrie, die für den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Grundstückes schiedene Werte liefert, sobald man die Seitenlängen verschieden anmt. Diese Unbestimmtheit ist nicht nur einer besondern Klasse von blemen eigentümlich (wie man oft meint, nur den Fällen *stetiger* Wahrinlichkeit), sondern ausnahmslos bei *allen* Aufgaben der Wahrscheinkeitsrechnung nachweisbar. Nur die historische Entwicklung der Wahrinlichkeitsrechnung aus der Theorie der Glückspiele, wo man durch anziehung des *Symmetrieprinzipes* die Unbestimmtheit scheinbar been kann, hat diesen Sachverhalt verdunkelt[11]).

Bei jeder Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf ein kones Problem ist — wie in jeder naturwissenschaftlichen Theorie — ein imaliger Übergang zwischen Theorie und Wirklichkeit zu vollziehen. muß erstens die *Ausgangs*werte der Rechnung, in unserm Fall die teilungen der gegebenen Kollektivs, feststellen und zweitens aus den hnungs*ergebnissen* Schlüsse auf den Verlauf der äußeren Erscheinungen en. Beide Aufgaben liegen außerhalb des eigentlichen Gedankenkreises Wahrscheinlichkeitsrechnung. Wir können aber je nach der Art des rganges drei hauptsächliche Anwendungsgebiete unterscheiden, die wir ihrem vorwiegenden Inhalt als die *Theorie der Glückspiele*, die *statistin* und die *physikalischen Problemgruppen* bezeichnen.

Am einfachsten liegen die Verhältnisse bei dem an letzter Stelle genten, jüngsten Anwendungsgebiet, dem in der *theoretischen Physik.* r gehören die Ausgangswerte der Wahrscheinlichkeitsberechnung, z. B. Annahme der Gleichmöglichkeit jeder Geschwindigkeitsgröße für alle eküle eines im ganzen ruhenden Gases, zu den hypothetisch eingeführten en des physikalischen Bildes und die Berechtigung der Einführung wird den Ergebnissen der Theorie geprüft. Aber nicht die unmittelbaren ultate der Wahrscheinlichkeitsberechnung erfahren eine Kontrolle durch Beobachtung — es wird z. B. nicht geprüft, ob wirklich einmal die xwellsche Geschwindigkeitsverteilung eintritt — sondern nur Folgegen, die erst durch bestimmte Hypothesen mit den ermittelten Verngen verknüpft sind. Es grenzt hier gewissermaßen an keiner der en Seiten die Wahrscheinlichkeitsuntersuchung *unmittelbar* an die

[11]) Bei stetigen (sog. geometrischen) Verteilungen hängt es auch noch von der Wahl Koordinatensystems ab, was man als „Gleichverteilung" *bezeichnen will.* Man kann wie G. Pólya, Sitzungsb. der Wiener Akademie Abt. IIa, 126, 1917, S. 319–328 ie Verteilung der Geraden im Raum es tut, die Anwendung dieser Bezeichnung ie Erfüllung gewisser plausibler Forderungen knüpfen: mit der Frage, welche eilung in einem konkreten Fall wirklich vorliegt, haben derlei Untersuchungen s zu tun.

Wirklichkeit: Hypothesen von physikalischer Natur liegen dazwischen. Gewisse physikalische Erscheinungen, wie die der Brownschen Bewegung gehören jedoch nicht hierher, sondern in den Ideenkreis der Statistik, w übrigens eine immer wachsende Zahl physikalischer Theorien allmählich den Bereich der eigentlichen statistischen Untersuchungen hinübergrei

Als *statistische Probleme* der Wahrscheinlichkeitsrechnung in engere Sinne fassen wir alle jene Aufgaben zusammen, bei denen die Ausgang werte der Rechnung durch tatsächliche Abzählung gewonnen (oder minc stens kontrolliert) werden. Ein geläufiges Beispiel für die hier auftretend Kollektivs ist folgendes: Elemente sind alle Männer eines bestimmte zeitlich und räumlich abgegrenzten Gebietes, die ein gewisses Alter b sitzen; das Merkmal eines Elementes ist 0 oder 1, je nachdem der E treffende das nächste Lebensjahr noch erlebt oder nicht. Die Größe (nämlich W_A für eine auf den Punkt 1 sich reduzierende Punktmenge heißt die „Sterbenswahrscheinlichkeit" für das ins Auge gefaßte Alt Als abgeleitetes Kollektiv kann etwa dieselbe Elementenfolge mit d Merkmalen 0, 1 für die Alternative: Erleben oder nicht Erleben eines b stimmten höheren Alters, angeführt werden. Natürlich kann W_1 nic als Grenzwert, sondern nur als Bruch mit endlichem, wenn auch se großem, Zähler und Nenner festgestellt werden und ebenso wird Resultat der Rechnung, das einen Grenzwert liefert, näherungsweise eine endliche Gesamtheit angewendet. Sehr deutlich tritt in dem tatsä lichen Verfahren des Versicherungswesens die Rolle unserer zweiten For rung von § 1 zutage: Denn man ermittelt W_1 durch Beobachtung an ei großen Gruppe erledigter Versicherungsfälle (die Eine Teilfolge von E menten) und sieht das Ergebnis auch als gültig an für die Gesamth der noch unerledigten (andere Teilfolge von Elementen). Daß jedes nur mit endlichen Folgen operiert werden kann, bedingt eine Ungenau keit, die gleichzustellen ist etwa den Verhältnissen in der praktisch Geometrie, wo man z. B. die Basislinie einer Aufnahme nur mit schränkter Genauigkeit messen und das errechnete Resultat nur mit ei bestimmten Genauigkeitsgrenze auf die Wirklichkeit übertragen kann. E weitere Analogie liegt auch darin, daß die Theorie in beiden Fällen Sätzen führt, die über die Zulässigkeit und Genauigkeit der Übertrag Aufschluß geben.

Die meisten Schwierigkeiten hat man in dem ältesten und ursprü lichsten Anwendungsgebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung, in der *The der Glückspiele*, gefunden. Man hat hier gemeint, für die „Gleichmögl keit" der sechs Seiten eines Würfels apriorische Erkenntnisquellen he ziehen zu müssen und darnach auch versucht, diese Anschauungsweise alle anderen Gebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung auszudehnen. Al

ist klar, daß die Gleichheit der sechs Wahrscheinlichkeiten W_1 bis W_6 ıts anderes als eine Forderung ist, durch die ein „richtiger" Würfel niert wird. Ob die Forderung in einem bestimmten Fall erfüllt ist,) von der Richtigkeit eines Würfels, kann man sich nicht anders über- gen, als indem man eine große Zahl N von Würfen ausführt und die otienten $N_A : N$ untersucht. Denn selbst wenn die völlige Homogenität Materials gesichert erscheint, bliebe es immer ungewiß, welchen Einfluß kleinsten Abweichungen von der Gestaltssymmetrie, die sich eben der einheit wegen der unmittelbaren Beobachtung entziehen, bei fortgesetzter igerung von N auf das Ergebnis der Würfe ausüben. Der einzige terschied gegenüber der Problemgruppe der Statistik besteht darin, daß sich dort um physische Objekte handelt, die von vornherein vollständig eben sind, während man die Objekte der Glückspiele künstlich herstellt l dabei so einzurichten sucht, daß die in der Rechnung angenommenen rteilungen möglichst genau realisiert werden. Haben wir oben die tistische Problemgruppe mit der Geodäsie verglichen, so müssen wir zt an die geometrische Untersuchung abstrakt definierter Körper denken; die Erforschung der Eigenschaften einer Kugel oder eines Ikosaëders es eben völlig gleichgültig, ob bzw. mit welcher Annäherung man der- ige Gebilde materiell ausführen kann.

Eine besondere Klasse *mathematischer Fragen*, die in neuerer Zeit er Verwendung der Ausdrucksweise der Wahrscheinlichkeitsrechnung Sprache gebracht wurden, müssen wir aus unseren Betrachtungen aus- ließen. Es handelt sich da um Elementfolgen, die der Forderung I, r nicht der Forderung II genügen, also Grenzwerte der relativen Häufig- ten aufweisen, ohne daß die Zuordnung zwischen Elementen und Merk- len zufallsartig oder regellos genannt werden kann. Hierher gehört B. die sog. Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Null an der ften Dezimalstelle der gemeinen Logarithmen aller ganzen Zahlen. ange man etwa nur die Zahlen $1-10000$ betrachtet, bietet die An- nung der Ziffern an der 5. Stelle tatsächlich das ungefähre Bild eines pirischen Kollektivs und man kann auch die Sätze der Wahrscheinlich- tsrechnung näherungsweise darauf anwenden. Faßt man aber die ganze ndliche Folge der Logarithmen ins Auge, so tritt eine leicht einzu- ende systematische Anordnung asymptotisch ein, die der Forderung II mittelbar widerspricht. Etwas Ähnliches liegt vor bei den von Borel u. a. ersuchten Fragen (z. B. über das Auftreten einzelner Ziffern in den ndlichen Dezimalbrüchen der irrationalen Zahlen), wo das Erfülltsein r Nicht-Erfülltsein der Forderung II ohne Bedeutung ist[12]). Die erste

[12]) Borel, Rendic. d. Circ. Mat. di Palermo 27 (1909), S. 247. Es handelt sich rbei durchwegs um Aufgaben, die in unserer Ausdrucksweise (§ 4) als „Mischungen"

Folge der unbeschränkten Einbeziehung solcher Fälle in den Aufgabe kreis der Wahrscheinlichkeitsrechnung wäre es, daß das Multiplikation gesetz der Wahrscheinlichkeiten (für das Auftreten von zwei aufeinande folgenden Nullen usw.) nicht mehr allgemeine Geltung hätte. Da ma seit jeher gewöhnt ist, mit dem Begriff der Wahrscheinlichkeit die Vo stellung der *Zufälligkeit* (und damit der Geltung des Multiplikationssatz in dem angedeuteten Sinn) zu verbinden, so könnte man hier höchste von *„uneigentlichen Wahrscheinlichkeiten"* sprechen. Besser wäre es fr lich, den schon ohnehin durch mancherlei Vieldeutigkeiten belasteten G brauch des Ausdruckes „Wahrscheinlichkeit" nicht noch weiter ausz dehnen[13]).

§ 3. Die Verteilungen.

In § 1 haben wir die Wahrscheinlichkeit W_A für das Auftreten ein zu A gehörigen Merkmals innerhalb eines bestimmten Kollektivs als ein (nach Satz 1) beschränkte, nicht-negative Mengenfunktion kennen gelern die nach Satz 2 von additivem Charakter ist. Wir können jetzt hi zufügen, daß — zufolge dieser Eigenschaften — W_A im Sinne d Carathéodoryschen Maßtheorie eine, im allgemeinen nicht reguläre, Ma funktion ist, für die *jede* Punktmenge Messbarkeit besitzt. Daraus folg und nur von dieser Eigenschaft der Maßfunktionen soll hier Gebrau gemacht werden, daß, wenn die Reihe der Punktmengen $A_1, A_2, A_3 \cdot$ zum Limes die Punktmenge A hat, auch die Zahlenfolge $W_{A_1}, W_{A_2}, W_{A_3} \cdot$ gegen W_A konvergiert.

Es ist wesentlich bequemer, statt mit einer *Mengen*funktion m einer gewöhnlichen *Punkt*funktion zu tun zu haben. Wir wollen dah die Verteilung innerhalb eines Kollektivs, d. i. die Gesamtheit aller Wah scheinlichkeitswerte, durch eine Funktion $W(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ der k Mer malkomponenten oder kürzer geschrieben durch $W(\bar{x})$, wo $\bar{x}$ den Vekt mit den Komponenten $x_1, x_2, \ldots, x_k$ bezeichnet, darstellen, und zwar w

---

zu bezeichnen sind, d. h. im wesentlichen um die Auswertung eines bestimmten I tegrales (Ermittlung des Inhaltes einer Punktmenge). Unsere Forderung II spi bei derartigen Aufgaben keine Rolle. Speziell die Frage nach der Wahrscheinlic keit dafür, daß in einem Dezimalbruch alle Ziffern gleich oft auftreten (vgl. au Rademacher, diese Zeitschr. Bd. 2, S. 306 und Bd. 3, S. 317 sowie G. Fabe Mathem. Annalen 69 (1910) S. 372–443) läßt sich vollständig im Rahmen unse Mischungsaufgaben formulieren. Vgl. auch die Fußnote [17]).

[13]) Bei F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914, S. 417 scheint das Wort „Wahrscheinlichkeit" schlechthin als Bezeichnung für den Quotient des Maßes einer Punktmenge durch das Maß einer Menge, in der sie enthalten i

t. Es soll $W(\bar{x})$ den Wert von W_A bedeuten für jene Punktmenge A, en Punkte die Koordinaten $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_k$ besitzen, für die

$$\xi_\varkappa \leqq x_\varkappa, \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$$

anderen Worten: $W(\bar{x})$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die e Merkmalkomponente höchstens den Wert x_1, die zweite höchstens Wert $x_2, \ldots$, die k-te höchstens den Wert x_k besitzt. Wir nennen $(\bar{x})$ die *Verteilungsfunktion* oder auch kurz die Verteilung und haben

Satz 8. *Die Verteilungsfunktion $W(\bar{x})$, die nur Werte des abchlossenen Intervalls* 0, 1 *annehmen kann, ist hinsichtlich jeder der ariablen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ monoton, nicht abnehmend und halbstetig nach n; sie hat für $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = -\infty$ den Wert null, für $x_1 = x_2 \ldots = x_k = \infty$ den Wert* 1.

Die drei Eigenschaften

$$0 \leqq W(\bar{x}) \leqq 1, \quad W(-\infty, -\infty \ldots -\infty) = 0, \quad W(\infty, \infty \ldots \infty) = 1$$

en unmittelbar aus Satz 1 bzw. Satz 3 hervor, denn die zu $(-\infty \ldots -\infty)$ gehörige Punktmenge A ist nach (6) leer, die zu $(\infty \ldots \infty)$ gehörige umfaßt den ganzen Merkmalraum. Daß $W(\bar{x})$ bei chsen einer Koordinate nicht abnehmen kann, folgt daraus, daß die $W(\bar{x})$ nach (6) gehörige Punktmenge stets größer wird, wenn $x_\varkappa$ zunmt. „Nach oben halbstetig" endlich heißt eine monotone Funktion, nn sie an jeder Unstetigkeitsstelle ihrem oberen Grenzwert gleich ist. s gilt für unser $W(\bar{x})$ zufolge des Gleichheitszeichens in (6), weil durch die am Rand des Gebietes etwa konzentrierten Wahrscheinlichtswerte, die Unstetigkeiten von W bedingen, mit in die Punktmenge A bezogen sind; genauer, weil die durch (6) definierte Menge der Limes analog mit den Vektoren $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \bar{x}^{(3)} \ldots$ gebildeten Mengen ist, sobald e Komponente der $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \bar{x}^{(3)} \ldots$ gegen die betreffende Komponente $\bar{x}$ *von oben* konvergiert.

Wir haben jetzt die Aufgabe, zu zeigen, wie sich W_A für verschiee Annahme von A durch $W(\bar{x})$ darstellen läßt. Sei zunächst ein alboffenes Intervall" durch die beiden Vektoren $\bar{a}$ und $\bar{b}$, für die $a_\varkappa \leqq b_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$, gegeben, also A als Ort der Punkte mit den Kodinaten $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ durch

$$a_\varkappa < \xi_\varkappa \leqq b_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$$

stimmt. Man sieht hier ohne weiteres, daß im eindimensionalen Falle

$$W_A = W(b_1) - W(a_1),$$

im Falle $k = 2$

$$(9'') \qquad W_A = W(b_1, b_2) - W(a_1, b_2) - W(b_1, a_2) + W(a_1, a_2)$$

gilt. Allgemein haben wir

Satz 9. *Besteht A aus allen Punkten des nach (8) durch $\bar{a}$ und bestimmten „halboffenen" Intervalls, so ist*

$$(10) \qquad W_A = \sum \pm W(x_1, x_2, \ldots, x_k),$$

wobei für jedes $x_\varkappa$ entweder $a_\varkappa$ oder $b_\varkappa$ zu setzen, das Vorzeichen positiv bei gerader, negativ bei ungerader Anzahl von a-Werten zu nehmen und die Summe über alle 2^k möglichen Kombinationen von a- und b-Werten zu erstrecken ist. Der Beweis läßt sich durch vollständige Induktion aus (9′) und (9″) gewinnen.

Bezeichnen wir den Ausdruck (10), in Anlehnung an den Gebrauch der Differentialrechnung als die „k-te, nach jeder Variablen einmal genommene Differenz" von $W(\bar{x})$:

$$(10') \qquad D^k_{\bar{a},\bar{b}}\, W(\bar{x}) \equiv \sum \pm W(x_1, x_2, \ldots, x_k),$$

so können wir noch hinzufügen:

Satz 10. *Besteht A aus den Punkten von endlich oder abzählbar unendlich vielen halboffenen Intervallen, die durch die Vektorpaare $\bar{a}_1, \bar{b}_1$, $\bar{a}_2, \bar{b}_2, \ldots$ bestimmt sind, so gilt*

$$(11) \qquad W_A = \sum_\iota D^k_{\bar{a}_\iota, \bar{b}_\iota}\, W(\bar{x}),$$

die Summe über alle ι-Werte erstreckt. Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 9 in Verbindung mit Satz 2.

Sei nun A eine beschränkte Punktmenge des Merkmalraumes, dann definieren wir als „Überdeckung von A durch Intervalle von der Weite ϱ_λ" die folgende Punktmenge A_λ. Wir denken uns den ganzen k-dimensionalen Raum durch Parallele zu den Koordinatenebenen, deren Abstand höchstens ϱ_λ ist, in lauter halboffene Intervalle zerlegt. Unser A_λ soll aus den Punkten aller jener endlich vieler Intervalle bestehen, die einen oder mehr Punkte mit A gemein haben. Diese Intervalle seien durch die Folge der Vektorpaare $\bar{a}_\iota$, $\bar{b}_\iota$ $(\iota = 1, 2, 3, \ldots)$ bestimmt und $\bar{\xi}_\iota$ sei ein dem ι-ten Intervall angehöriger Punkt von A. Bezeichnet jetzt $f(\bar{x})$ eine beliebige stetige Funktion von $\bar{x}$, die in allen Punkten von A definiert ist, so schreiben wir im Sinne der *Stieltjesschen Integraldefinition*, falls der Limes auf der linken Seite existiert:

$$(12) \qquad \lim_{\varrho_\lambda = 0} \sum_\iota f(\bar{\xi}_\iota)\, D^k_{\bar{a}_\iota, \bar{b}_\iota}\, W(\bar{x}) = \int_{(A)} f(\bar{\xi})\, dW(\bar{\xi})$$

ei für $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ eine beliebige gegen null konvergierende Zahlenfolge etzen und die Summe links bei jedem λ über alle zur Überdeckung A_λ örigen Teile zu erstrecken ist. Ist $|f|$ beschränkt, so kann (12) nicht ßer sein als das Produkt von W_A in die obere Schranke von $|f|$, also h nicht größer als diese Schranke selbst. Die Existenz des Limes wird diesem Fall genau so nachgewiesen, wie in dem des eindimensionalen eltjesschen Integrals.

Ist A nicht beschränkt, so bildet man eine Folge beschränkter, gegen konvergierender Punktmengen und definiert demgemäß als „uneigentes" Stieltjes-Integral den so entstehenden Grenzwert der rechten e von (12). Umfaßt insbesondere A alle Punkte des Merkmalraumes ennt man den (12) „*in bezug auf die Verteilung W* genommenen *Mittelt* (auch Durchschnitt, mathematische Hoffnung) *von f*".

Wir betrachten zunächst den Fall $f = 1$. Ist A eine *abgeschlossene* nge, so haben die Überdeckungen $A_1, A_2, A_3 \ldots$ bei gegen null gehender ervallweite $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \ldots$ die Menge A zum Limes. Es besteht daher h der eingangs dieses Paragraphen erwähnten Eigenschaft von W_A, Rücksicht auf Satz 10 der

Satz 11. *Ist A eine beliebige abgeschlossene Punktmenge des rkmalraumes, z. B. ein regulär begrenztes Gebiet einschließlich aller ndpunkte, so wird W_A durch das über A erstreckte Stieltjessche egral der Verteilungsfunktion $W(\bar{x})$ dargestellt:*

$$W_A = \int_{(A)} d\,W(\bar{\xi}), \tag{}$$

ei (12) (event. mit der Ergänzung für nicht beschränkte A) als Detion des Integrales gilt.

Mit den vorstehenden Sätzen 9—11 wollen wir die Frage nach der rstellung von W_A durch die Verteilungsfunktion $W(\bar{x})$ als erledigt an-en. Wir gebrauchen nun noch die Definition (12), um das, was man röhnlich als „Mittelwert", als „Streuung" und als „höhere Momente" r Verteilung bezeichnet, allgemein zu erklären. Wir verstehen unter *telwert* der durch $W(\bar{x})$ gegebenen Verteilung den *Vektor*, dessen mponenten durch die über den ganzen unendlichen Merkmalraum erckten Stieltjesschen Integrale

$$a_\varkappa = \int \xi_\varkappa\, d\,W(\bar{\xi}) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k) \tag{}$$

timmt werden, vorausgesetzt, daß die Integrale existieren. Nach der n eingeführten Bezeichnung ist $a_\varkappa$ nichts anderes als der in bezug auf genommene Mittelwert von $x_\varkappa$. Stellt man sich W_A unter dem Bild r Massenverteilung vor (also so, daß jede Punktmenge A die Masse besitzt), so sind die $a_1, a_2, \ldots, a_k$ nichts anderes als die Koordinaten

des *Schwerpunktes* (weil die Gesamtmasse gleich 1). Analog entspreche die *Trägheits-* und *Deviationsmomente* der Massenverteilung den Komponenten der Streuung: Wir verstehen unter der *Streuung* einer durch $W(\bar{x})$ gegebenen Verteilung die *Matrix* (das Vektorgebilde zweiter Stufe), deren Komponenten durch die wieder über den ganzen Raum erstreckten Integrale

$$(15) \qquad s_{\varkappa\lambda} = \int (\xi_\varkappa - a_\varkappa)(\xi_\lambda - a_\lambda)\, dW(\bar{\xi}) \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2 \ldots, k)$$

definiert sind, wofern die Integrale existieren. Es bedarf danach keiner besonderen Erklärung, was man unter den *Momenten höheren Grades* versteht, wenn wir bemerken, daß der Mittelwert das Moment ersten, die Streuung das auf den Mittelwert bezogene Moment zweiten Grades darstellt.

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung hat man es ausschließlich mit Verteilungen zu tun, für die Mittelwert und Streuung existieren und endlich sind. Wir begnügen uns mit der Feststellung:

Satz 12. *Wenn die Stieltjesschen Integrale*

$$(16) \qquad \int_{(A)} \xi_\varkappa^a \, dW(\bar{\xi}) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$$

erstreckt über einen Raum A, dessen Koordinaten $\xi_\varkappa$ den Bedingungen $|\xi_\varkappa| > X$ genügen, mit wachsendem $X > 0$ sämtlich gegen null gehen, so besitzt die durch $W(\bar{x})$ gegebene Verteilung einen Vektor $\bar{a}$ als Mittelwert und eine Matrix $\overline{\overline{s}}$ als Streuung, deren Komponenten durch (14) und (15) gegeben sind. —

Wenn man sich von vornherein grundsätzlich auf solche Probleme beschränkt, wie sie bisher in der Wahrscheinlichkeitsrechnung behandelt zu werden pflegten, so kann man den Begriff der Verteilung bedeutend enger fassen, als es hier geschehen ist, freilich nicht mehr in einheitlicher Form. Bekanntlich besitzt eine monotone Funktion überall, höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge von Punkten, einen Differentialquotienten

$$(17) \qquad W'(\bar{x}) = \frac{d^k W(\bar{x})}{dx_1, dx_2, \ldots, dx_k}.$$

Die Spezialisierung, die wir jetzt vornehmen wollen, führt auf folgende zwei Typen von Verteilungen, die allein für die bisherigen Fragestellungen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung in Betracht kommen:

a) *Geometrische Verteilungen.* Die Verteilungsfunktion $W(\bar{x})$ besitzt *überall* eine endliche Ableitung

$$W'(\bar{x}) = w(\bar{x}),$$

die im ganzen Raum *beschränkt* ist; wir nennen $w(\bar{x})$ die *Wahrscheinlichkeitsdichte* an der Stelle $\bar{x}$.

b) *Arithmetische Verteilungen.* Die Verteilungsfunktion $W(\bar{x})$ hat (mindestens zwei) *Punkten mit ganzzahligen Koordinaten* — bzw. den kten eines andern Punktgitters oder irgendeiner endlichen oder abzähl-en Punktmenge — $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 \ldots$ *endliche* (eventuell im Limes verschwin-de) *Sprünge* $\mathfrak{w}(\bar{x}_1), \mathfrak{w}(\bar{x}_2), \mathfrak{w}(\bar{x}_3) \ldots$ nach sämtlichen Koordinatenrich-gen und weist an allen Punkten, deren Koordinaten keinen der ausge-hneten Werte besitzen, die erste *Ableitung null* nach jeder Richtung auf; nennen $\mathfrak{w}(\bar{x}_\iota)$ die *Einzelwahrscheinlichkeit* des Punktes $\bar{x}_\iota$.

Der erste Fall liegt z. B. vor beim Bertrandschen Problem des nenziehens (§ 2), wo eine Funktion $w(\alpha)$ als Wahrscheinlichkeitsdichte das Ziehen einer Geraden unter dem Winkel α gegen eine feste Achse eben sein muß (übliche Annahme $w(\alpha) = \text{konst.} = 1:2\pi$). Für arith-tische Verteilungen sind in § 2 verschiedene Beispiele aus dem Gebiet Glücksspiel-Aufgaben angeführt worden[14]). Die ältere Theorie der icksspiele kannte nur arithmetische Verteilungen; daher wird in der gel die Wahrscheinlichkeitsrechnung nur auf den Begriff der Einzel-rscheinlichkeit aufgebaut, insbesondere auf den speziellen Fall nur ier ausgezeichneter Punkte (einfache Alternative). Die geometrischen, r wie sie oft heißen, kontinuierlichen, Wahrscheinlichkeiten pflegt man n hinterher als eine Begriffs-Erweiterung einzuführen. Bachelier hat umgekehrten Weg eingeschlagen und versucht, die „diskontinuierliche" hrscheinlichkeit aus der kontinuierlichen herzuleiten[15]). Die Unter-eidung der beiden Fälle ist, wie wir gesehen haben, *für die Grund-ung der Wahrscheinlichkeitsrechnung überhaupt unwesentlich.* Nur n man für die Definition der Wahrscheinlichkeit auf sog. „gleichmög-e Fälle" zurückgehen will, entsteht eine gewisse Schwierigkeit bei den metrischen Verteilungen[11]). Wie der „geometrische" Fall in der Me-nik der Kontinua, der „arithmetische" in der Punktmechanik seine Ana-ie findet, so könnte man auch noch Fälle von Verteilungen „längs ien" oder „längs Flächen" allgemein in Betracht ziehen. Die hier vor-genden, im Grunde sehr einfachen Verhältnisse sind vielfach auch da-rch verwirrt worden, daß man bei der Durchführung gewisser Probleme r arithmetische Verteilungen stetige Funktionen als Näherungen für thmetische Ausdrücke (Stirlingsche Formel für die Fakultäten) ver-ndete.

---

[14]) Hierbei ist die Anzahl der Sprungstellen stets eine endliche; indem wir auch ählbar unendlich viele zulassen, schließen wir auch die von Borel a. a. O.[12]) aufge-fenen Fragestellungen — soweit nicht die oben erwähnten Bedenken entgegen-ien — ein.

[15]) L. Bachelier, Calcul des Probabilités, Paris 1912. Vgl. a. E. Czuber, l.c.[8]) S. 275.

Die in den Sätzen 11 und 12 gegebenen allgemeinen Formeln spe zialisieren sich für die Fälle arithmetischer und geometrischer Verteilun in leicht ersichtlicher Weise. Wir sprechen die Resultate in den folgende beiden Sätzen aus:

Satz 13. *Besitzt die geometrische Verteilung eines Kollektivs d im ganzen Raum beschränkte Wahrscheinlichkeitsdichte $w(\bar{x})$, so wir die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines zu A gehörigen Merk males durch das k-fache Integral*

$$W_A = \int_{(A)} w(\bar{x})\, dX \tag{18a}$$

dargestellt, das über alle Punkte der Punktmenge A zu erstrecken is Der Mittelwert $\bar{a}$ bzw. die Streuung $\bar{\bar{s}}$ der Verteilung hat zu Kompo nenten die über den ganzen Raum zu nehmenden Integrale:

$$a_\varkappa = \int x_\varkappa\, w(\bar{x})\, dX, \quad s_{\varkappa,\lambda} = \int (x_\varkappa - a_\varkappa)(x_\lambda - a_\lambda)\, w(\bar{x})\, dX, \tag{18b}$$
$$(\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, k$$

der Durchschnitt (die mathem. Hoffnung) einer Funktion $f(\bar{x})$ den ebens zu bildenden Wert

$$\int f(\bar{x})\, w(\bar{x})\, dX, \tag{18c}$$

wo jedesmal dX das Raumelement $dx_1, dx_2, \ldots, dx_k$ bezeichnet — wofer diese Integrale konvergieren.

Satz 14. *Besteht die Merkmalmenge eines Kollektivs m arithmetischer Verteilung aus den endlich oder abzählbar unendlic vielen Punkten $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \bar{x}^{(3)} \ldots$ mit den Einzelwahrscheinlichkeite $\mathfrak{w}(\bar{x}^{(1)}), \mathfrak{w}(\bar{x}^{(2)}), \mathfrak{w}(\bar{x}^{(3)}) \ldots$, so wird die Wahrscheinlichkeit für d Auftreten eines zu A gehörigen Merkmals durch*

$$W_A = \sum_{(\iota)} \mathfrak{w}(\bar{x}^{(\iota)}) \tag{19a}$$

dargestellt, wobei die Summation über alle jene ι zu erstrecken is deren $\bar{x}^{(\iota)}$ der Punktmenge A angehört. Der Mittelwert $\bar{a}$ bzw. d Streuung $\bar{\bar{s}}$ der Verteilung hat die Komponenten

$$a_\varkappa = \sum_{(\iota)} x_\varkappa^{(\iota)}\, \mathfrak{w}(\bar{x}^{(\iota)}), \quad s_{\varkappa,\lambda} = \sum_{(\iota)} (x_\varkappa^{(\iota)} - a_\varkappa)(x_\lambda^{(\iota)} - a_\lambda)\, \mathfrak{w}(\bar{x}^{(\iota)}), \tag{19b}$$
$$(\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, k$$

und der Durchschnitt (die mathem. Hoffnung) einer Funktion f ist

$$\sum f(\bar{x}^{(\iota)})\, \mathfrak{w}(\bar{x}^{(\iota)}), \tag{19c}$$

wobei die Summation sämtliche ι umfassen muß — wofern diese Summe konvergieren.

Wir werden im folgenden stets von der einheitlichen Bezeichnungs-
e der Stieltjesschen Integrale Gebrauch machen, sobald wir allge-
ne Eigenschaften der Verteilungen behandeln.

§ 4. Die einfachen Operationen.

Mit Satz 4 des § 1 ist bereits ein Verfahren zur Ableitung neuer
lektivs aus gegebenen eingeführt worden. Bei diesem Verfahren, das
auch zu den einfachen Operationen rechnen und speziell als die
uswahl" bezeichnen, besitzt das neue Kollektiv dieselbe Merkmalmenge
das ursprüngliche, während die Elemente selbst durch eine „zulässige"
wahl aus der Elementenfolge des gegebenen Kollektivs hervorgehen.
h Satz 4 bleibt bei der „Auswahl" die Verteilung unverändert; Bei-
le sind schon angeführt worden.

Insgesamt kennen wir *vier* verschiedene einfache Operationen: die
uswahl", die „*Mischung*", die „*Teilung*" und die „*Verbindung*".
drei ersten gehen von einem einzigen gegebenen Kollektiv aus, die
bindung setzt zwei gegebene Kollektivs oder ein Kollektiv und eine
r von solchen als gegeben voraus.

Aus einem Kollektiv K, dessen Merkmalmenge aus mehr als zwei
kten besteht, leitet man durch *Mischung* ein Kollektiv K' wie folgt
Die Elemente von K' sind dieselben wie die von K, aber ihre
kmale $\bar{x}'$ sollen andere sein, und zwar sollen sie durch eine eindeutige,
t *eindeutig umkehrbare*, Transformation

$$\bar{x}' = \bar{f}(\bar{x}), \ldots, \quad \bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{x}') \qquad (\bar{\varphi} \text{ mehrdeutig})$$

den Merkmalen $\bar{x}$ der Elemente von K hervorgehen. Man kann auch
n, daß die Merkmalmenge M von K in Teilmengen $\bar{\varphi}$ zerlegt ist,
n jeder ein Punkt $\bar{x}'$ eines neuen Merkmalraumes (der auch von
rer Dimension sein kann) entspricht. Es werden so gewissermaßen
jene Elemente, deren Merkmale zu demselben $\bar{\varphi}$ gehören, „gemischt".
sieht sofort, daß die neue Zuordnung zwischen Elementen und Merk-
n den beiden Forderungen I und II genügt. Denn einmal hat man
lge der Bedeutung von W_A nach (1):

$$W'_{A'} = W_A,$$

n $W'_{A'}$ die Wahrscheinlichkeit innerhalb des neuen Kollektivs bezeichnet
A die durch Transformation nach der zweiten der Gleichungen (20)
A' hervorgehende Punktmenge ist. Ferner ist die Forderung II hin-
lich irgend zweier Punktmengen A', B' für das neue Kollektiv iden-
mit derselben Forderung für das ursprüngliche hinsichtlich der trans-
ierten Mengen A, B. Wir haben also

Satz 15. *Jedes Kollektiv K mit der Verteilung $W(\bar{x})$ und ein* *aus mehr als zwei Punkten bestehenden Merkmalmenge M bestimmt ei* *endliche oder unendliche Anzahl neuer Kollektivs K', die durch „Mischung* *aus K hervorgehen: die Elemente (e') von K' sind die Elemente (e) von* *aber alle jene e' haben das gleiche Merkmal $\bar{x}'$, deren ursprünglich* *Merkmal $\bar{x}$ einer bestimmten, nicht durchwegs aus einem Punkt b* *stehenden Teilmenge $\bar{\varphi}$ von M angehörte; der Zusammenhang von $\bar{x}$ und* *hat die Form (20), wo $\bar{f}$ eine eindeutige, $\bar{\varphi}$ eine nicht durchwegs ei* *deutige Funktion bezeichnet. Die neue Verteilung geht aus der alt* *durch (21) hervor, wenn A die Vereinigungsmenge aller $\bar{\varphi}$ ist, deren er* *sprechende Punkte $\bar{x}'$ zu A' gehören, oder durch*

$$W'(\bar{x}') = \int_{(X)} dW(\bar{\xi}), \tag{22}$$

wenn X aus allen Punkten $\bar{\xi}$ besteht, für die

$$f_\iota(\bar{\xi}) \leqq x_\iota' \qquad (\iota = 1, 2, \ldots, k \tag{22'}$$

Als Grenzfall der Mischung oder als „*uneigentliche* Mischung" müss wir noch das Auftreten einer ein-eindeutigen Transformation der Me male zulassen, die natürlich keine wesentlich neuen Kollektivs liefert.

Beispiele von Mischungen: 1) K besteht aus den Würfen ei *Würfelpaares*, deren zweidimensionales Merkmal die beiden geworfen Augenzahlen bilden; in K' haben dieselben Elemente zum Merkmal Summe der geworfenen Augenzahlen. In leicht verständlicher Bezeic nung[16]) ist

$$\mathfrak{w}_x' = \sum_{\varkappa,\lambda} \mathfrak{w}_{\varkappa,\lambda}, \quad \text{mit } \varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, 6;\ \varkappa + \lambda = x = 2, 3, \ldots, \tag{23'}$$

2) Elemente von K und K' sind die durch einen festen Punkt im Inn eines Kreises in der Ebene gezogenen Geraden. Das Merkmal einer raden ist innerhalb K ihr Winkel mit einer festen Achse, innerhalb die Zahl null oder eins, je nachdem die Kreissehne auf der Geraden kür oder länger ausfällt als die Seite des dem Kreise eingeschriebenen glei seitigen Dreieckes (Bertrandsches Problem). Es ist

$$W_1' = \int_{(A)} w(\alpha) d\alpha, \tag{23''}$$

wenn $w(\alpha)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte im ersten Kollektiv bezeich und das Integral über jenen Wertbereich A der α erstreckt wird, der Rücksicht auf den gewählten Fixpunkt eine Sehne größer als $r\sqrt{3}$ erg 3) Elemente von K und K' sind die gegen eine Scheibe blindlings ab

[16]) Hier und im folgenden ist, wo Mißverständnisse nicht entstehen können, ganzzahlige Argument der Funktionen $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{w}'$ usf. als *Index* geschrieben.

nen Schüsse, Merkmal eines Schusses innerhalb K die Koordinaten x, y, halb K' die Entfernung r des Einzelschusses von der Scheibenmitte. der gegebenen Wahrscheinlichkeitsdichte $w(x, y)$ rechnet sich die hte $w'(r)$ wie folgt:

$$w'(r) = r \int_0^{2\pi} w(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\varphi$$

Diese drei Beispiele repräsentieren die typischen Fälle von Mischungen, n dem Bereich arithmetischer und geometrischer Verteilungen vor- men. Wir formulieren die Ergebnisse allgemein in

Satz 16. *Aus einem Kollektiv mit arithmetischer Verteilung geht h Mischung stets wieder ein solches hervor; die neuen Einzelwahr- nlichkeiten* $\mathfrak{w}'$ *rechnen sich aus den gegebenen* $\mathfrak{w}$ *nach der Gleichung*

$$\mathfrak{w}'(\bar{x}'_\varkappa) = \sum_{(\iota)} \mathfrak{w}(\bar{x}_\iota), \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots)$$

lie Summe über alle $\bar{x}_\iota$ *zu erstrecken ist, die vermöge der Transfor- on (20) in* $\bar{x}'_\varkappa$ *übergehen. Aus einem Kollektiv mit geometrischer eilung kann eines mit arithmetischer Verteilung entstehen, wobei*

$$\mathfrak{w}'(\bar{x}'_\varkappa) = \int_{(A)} w(\bar{x})\, dX$$

etzen ist, wenn die Integration über alle jene $\bar{x}$*-Werte erstreckt wird, sich in den Wert* $\bar{x}'_\varkappa$ *transformieren. Endlich kann in letzterem e auch ein Kollektiv mit geometrischer Verteilung gebildet werden dem Ergebnis*

$$w'(\bar{x}') = \int w(\bar{x})\, dX'',$$

h $\bar{x}$ *durch eine ein-eindeutige Transformation in die* $k' + k''$ *Variablen* $x'_2, \ldots, x'_{k'}$, *und* $x''_1, x''_2, \ldots, x''_{k''}$ *übergeführt, damit das Raumelement in* $dX'\, dX''$ *zerlegt (wo* $dX' = dx'_1\, dx'_2 \ldots dx'_{k'}$*) und dann über alle e der* x'' *bei festen* x' *integriert wird*[17]).

Ein besonderer Fall der Mischung soll noch im Hinblick auf seine rische Bedeutung für die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung hervorgehoben werden. Man hat es oft, namentlich in der Theorie Glückspiele mit arithmetischen Verteilungen zu tun, bei denen alle

[17]) Ein Beispiel für eine Mischung, die weder zu den arithmetischen noch zu geometrischen Fällen gehört, ist das von Borel, Hausdorff, Faber und emacher behandelte Problem, vgl. Fußnote [12]). Elemente sind je ein beliebig sgegriffener echter Dezimalbruch, sein Merkmal zunächst seine Größe, dann aber Ergebnis der Mischung — die Zahl 0 oder 1, je nachdem in seiner Entwicklung Ziffern 0 bis 9 gleich oft vorkommen oder nicht. Die Lösung, soweit sie Sache Wahrscheinlichkeitsrechnung ist, wird durch Satz 15, Gl. (22) gegeben.

Einzelwahrscheinlichkeiten *untereinander gleich* sind (gleich möglich Fälle). Wird aus einem derartigen Kollektiv durch Mischung eine ei fache Alternative gebildet, indem man von den n Merkmalpunkten n_1 < zusammenfaßt und ihnen den Punkt 1 des neuen (linearen) Merkmalraum zuordnet, den übrigen $n_0 = n - n_1$ aber den Punkt 0, so wird nach (24 $w_1' = n_1 w = n_1 : n$. Wir können so als einen Satz aussprechen, was der üblichen Darstellungsweise fälschlich als *Definition der Wahrschei lichkeit* an die Spitze gestellt wird:

Satz 17. *Entsteht ein Kollektiv, das eine einfache Alternative da stellt, durch Mischung aus einem Kollektiv mit gleichförmiger arit metischer Verteilung, so ist innerhalb des neuen Kollektivs die Wah scheinlichkeit für das „Eintreffen des Ereignisses" gleich dem Quotient aus der Anzahl n_1 der „dem Ereignis günstigen Fälle" durch die Gesa zahl n der „gleichmöglichen Fälle".*

Die Bedeutung der in diesem Satz verwendeten neuen Ausdrücke ge aus der Ableitung eindeutig hervor. Ohne diese und die vorausgegange Definition des Kollektivs usw. hätte die Erklärung des Quotienten n_1 als Wahrscheinlichkeit keinen exakten Sinn.

Wir wenden uns nun zu der dritten der oben angeführten einfach Operationen, der *Teilung* oder *Aussonderung*. Hier bleiben beim Üb gang vom gegebenen Kollektiv K zum neuen K' die Merkmale der E mente unverändert, aber K' besteht nur aus jenen Elementen von deren Merkmal einer bestimmten eigentlichen Teilmenge M' der Merkm menge M von K angehört. Von M' setzen wir nur voraus, daß es mindestens zwei Teilmengen besteht, denen je unendlich viel Eleme entsprechen. Dann folgt unmittelbar aus der Erfüllung der Forderung durch K, daß für die neue Elementenfolge und ihre Zuordnung sowoh als II besteht. Man braucht, um sich hiervon zu überzeugen, nur M' Vereinigungsmenge der in der Forderung II auftretenden Mengen A und anzusehen. Bezeichnen wir jetzt mit A' eine beliebige Teilmenge M', so ist $W_{A'}'$ nach (3) proportional $W_{A'}$ und wegen $W_{M'}' = 1$ k der Proportionalitätsfaktor nur $1 : W_{M'}$ sein. Wir haben also:

Satz 18. *Jedes Kollektiv K mit einer aus mehr als zwei Punk bestehenden Merkmalmenge M und der Verteilung $W(\bar{x})$ bestimmt e endliche oder unendliche Anzahl neuer Kollektivs K', die durch „Teilu oder „Aussonderung" aus K hervorgehen: die Elemente (e') von K' s alle jene Elemente von K, deren Merkmal einer bestimmten, aus min stens zwei Teilmengen mit je unendlich viel Elementen bestehenden, eig lichen Teilmenge M' von M angehört; die Merkmale der Elemente blei*

ändert, so daß M' die Merkmalmenge von K' ist. Die neue Ver-ng geht aus der alten durch

$$W'_{A'} = \frac{W_A}{W_{M'}}$$

or, wenn A die Durchschnittsmenge von A' und M' bezeichnet, oder h

$$W'(\bar{x}') = \frac{\int\limits_{(\bar{M}')}^{(\bar{x})} dW(\bar{\xi})}{\int\limits_{(\bar{M}')} dW(\bar{\xi})},$$

n im Nenner über alle Punkte von M', im Zähler über alle Punkte M', für die $\xi_\iota \leqq x_\iota$ $(\iota = 1, 2, \ldots, k)$ ist, integriert wird.

Beispiele: 1) K besteht aus den Würfen eines Würfels, deren Merkmal Augenzahl $1 \ldots 6$ ist. Die drei geradzahligen Merkmale 2, 4, 6 werden Teilmenge M' zusammengefaßt, die K' bestimmt. Man erhält[16])

$$\mathfrak{w}'_2 = \frac{\mathfrak{w}_2}{\mathfrak{w}_2 + \mathfrak{w}_4 + \mathfrak{w}_6}, \quad \mathfrak{w}'_4 = \frac{\mathfrak{w}_4}{\mathfrak{w}_2 + \mathfrak{w}_4 + \mathfrak{w}_6}, \quad \mathfrak{w}'_6 = \frac{\mathfrak{w}_6}{\mathfrak{w}_2 + \mathfrak{w}_4 + \mathfrak{w}_6},$$

die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß ein Wurf die Zahl 2, bzw. 4, 6 ergibt, wenn man „schon weiß", daß das Ergebnis ein geradzahliges ist. 2) Ein Element von K bestehe darin, daß aus einer Menge Urnen, die schwarze und weiße Kugeln in endlich viel verschiedenen Mischungsverhältnissen x_1 enthalten, eine Urne willkürlich herausgegriffen daraus dreimal gezogen wird. Das Merkmal eines solchen Elementes zweidimensional, und zwar sei die erste Komponente das betreffende Mischungsverhältnis x_1 der Urne, das zweite die (zwischen 0 und 3 liegende) Zahl x_2 der gezogenen weißen Kugeln: gegebene Verteilung $\mathfrak{w}(x_1, x_2)$. Die Merkmalmenge M' des neuen Kollektivs K' bestehe aus allen Punkten mit $x_2 = 2$. Man hat

$$\mathfrak{w}'(x_1^{(\iota)}) = \frac{\mathfrak{w}(x_1^{(\iota)}, 2)}{\sum\limits_{(\iota)} \mathfrak{w}(x_1^{(\iota)}, 2)}, \qquad (\iota = 1, 2, 3 \ldots)$$

$x_1^{(\iota)}$ mit $\iota = 1, 2, 3 \ldots$ die einzelnen möglichen Werte des Mischungsverhältnisses bezeichnet.

In der üblichen Ausdrucksweise der Wahrscheinlichkeitsrechnung spricht man in dem Falle des ersten Beispiels von einer „Wahrscheinlichkeit a posteriori" oder „*Wahrscheinlichkeit auf Grund der Erfahrung*", weil sie die Wahrscheinlichkeit bedeutet, das Ergebnis 2 zu erhalten, „nachdem man schon weiß", daß das Ergebnis ein geradzahliges ist. Im Falle des zweiten Beispiels spricht man gar von einer „*Wahrscheinlichkeit der Ursachen*", indem man die Frage dahin formuliert, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Ziehungsergebnis $x_2 = 2$ (d. h. 2 weiße Kugeln in 3 Zügen)

der „Ursache“ $x_1^{(\iota)}$ zugeschrieben werden darf. Man sieht, daß die Ve
wendung derartiger Bezeichnungen, vor allem aber die Abtrennung d
hierhergehörigen Probleme von den übrigen und ihre Zusammenfassung
besondere Kapitel der Wahrscheinlichkeitsrechnung der Sachlage nicht a
gemessen ist. Um die spezielle Aufgabenstellung, die im zweiten Beisp.
vorliegt (Verminderung der Zahl der Merkmalkomponenten), kurz zu ken
zeichnen, werden wir sie gelegentlich als „Teilung durch Festlegung ei
zelner Merkmalkomponenten“ oder kürzer als „Festlegung“ bezeichne
Wir fassen die aus (26′) und (26″) hervorgehenden und die analog
Ergebnisse für geometrische Verteilungen zusammen in

Satz 19. *Aus einem Kollektiv mit arithmetischer Verteilung g
durch Teilung wieder ein solches hervor; die neuen Einzelwahrscheinlic
keiten sind für einen Punkt $\bar{x}_\iota$ der neuen Merkmalmenge M'*

$$\mathfrak{w}'(\bar{x}_\iota) = \frac{\mathfrak{w}(\bar{x}_\iota)}{\sum\limits_{(\varkappa)} \mathfrak{w}(\bar{x}_\varkappa)}, \qquad (\iota = 1, 2, 3 \ldots) \tag{27′}$$

*wobei die Summe im Nenner über alle Punkte $\bar{x}_\varkappa$ zu erstrecken ist,
zur Merkmalmenge M' gehören. Entsteht M' durch „Festlegung“ e
zelner Komponenten von $\bar{x}$, so können diese Komponenten im Merkm
des neuen Kollektivs weggelassen werden. Ist die Verteilung des Ausgan
kollektivs geometrisch, so ist es bei geeigneter Festsetzung von M' auch
des durch Teilung abgeleiteten, dessen Wahrscheinlichkeitsdichte in ein
Punkt von M' dann*

$$w'(\bar{x}) = \frac{w(\bar{x})}{\int\limits_{(M')} w(\bar{\xi})\, d\bar{\xi}} \tag{27″}$$

beträgt, wobei die Integration im Nenner über M' erstreckt werden m

Die vierte und letzte der einfachen Operationen geht in ihrer
facheren Form, in der sie „*Verbindung unabhängiger Kollektivs*“ heil
soll, von zwei gegebenen Kollektivs aus. Die beiden seien mit K'
K'' bezeichnet, ihre Elemente mit $e_1', e_2', e_3' \ldots$ bzw. $e_1'', e_2'', e_3'' \ldots$ und i
Merkmale $\bar{x}'$ bzw. $\bar{x}''$ seien k'- bzw. k''-dimensional. Die Eleme
$e_1, e_2, e_3 \ldots$ der Verbindung von K' und K'' sind die paarweise V
bindung der Elemente von K' und K'', nämlich e_1 die Verbindung e_1', e_1''
dann e_2 die Verbindung e_2', e_2'' usw. Das Merkmal $\bar{x}$ der $e_1, e_2 \ldots$
$k = k' + k''$-dimensional, und zwar bestehen die k Komponenten des Me
mals von e_1 aus den k' Komponenten des Merkmals von e_1' und den k'' Ko
ponenten des Merkmals von e_1''. Die neue Merkmalmenge M ist darn
das „Produkt“ der Mengen M' und M''. Wir müssen zeigen, daß die
definierte Zuordnung den Forderungen I und II genügt und in welc
Weise sich die Verteilung W_A aus den Verteilungen $W_{A'}$ und $W_{A''}$ rech

ei A das „Produkt“ von A' und A'', d. h. die Menge der Punkte des mensionalen Raumes, deren Koordinaten durch Aneinanderreihung der rdinaten der Punkte von A' und A'' in allen möglichen Kombinationen tehen. Unter den ersten N Elementen von (e') befinden sich $N'_{A'}$ nente mit einem der Menge A' angehörigen Merkmal. Durch diese nente wird nach dem zweiten der in § 1 angeführten Verfahren „zu-ger“ Auswahl aus der Elementfolge (e'') eine Teilfolge ausgewählt, rhalb welcher — wenn sie ins Unendliche fortgeführt wird — die alte eilung von K'' fortbesteht. Seien unter den genannten $N'_{A'}$ ersten nenten der aus (e'') gebildeten Teilfolge $N''_{A''}$ solcher Elemente, deren mal nach A'' fällt, dann ist also

$$\lim_{N'_{A'}=\infty} \frac{N''_{A''}}{N'_{A'}} = W''_{A''};$$

erseits gilt für das erste Kollektiv K' definitionsgemäß

$$\lim_{N=\infty} \frac{N'_{A'}}{N} = W'_{A'}.$$

ist aber $N''_{A''}$ nichts anderes als die Anzahl derjenigen unter den n N Elementen von K, deren erste k' Merkmalkomponenten zu A', restliche k'' Komponenten zu A'' gehören, so daß also ihr neues mal $\bar{x}$ gerade einen Punkt von A bildet. Wir haben daher nach (1) den vorstehenden Gleichungen (28′) und (28″):

$$W_A = \lim_{N=\infty} \frac{N''_{A''}}{N} = \lim_{\substack{N=\infty \\ N'_{A'}=\infty}} \frac{N'_{A'}}{N} \cdot \frac{N''_{A''}}{N'_{A'}} = W'_{A'} \cdot W''_{A''}.$$

it ist gezeigt, daß die neue Zuordnung der Forderung I genügt, und hzeitig die Berechnung der neuen Verteilung grundsätzlich erledigt. man kann jeden *einzelnen Punkt* $\bar{x}$ des neuen Merkmalraumes als Produkt je eines Punktes $\bar{x}'$ bzw. $\bar{x}''$ der Merkmalräume von K' K'' ansehen, indem man

$$x_1 = x'_1,\ x_2 = x'_2 \ldots x_{k'} = x_{k'},\ x_{k'+1} = x''_1,\ x_{k'+2} = x''_2 \ldots x_k = x''_{k''}$$

Daß auch die Forderung II von der neu definierten Zuordnung erfüllt folgt daraus, daß jede „zulässige“ Auswahl aus den (e) auch eine ssige“ Auswahl aus den (e') bzw. (e'') bedeutet. Denn wenn die male $\bar{x}$ der auszuwählenden e_x nicht benützt werden sollen, so heißt das, die Merkmale $\bar{x}'$ und $\bar{x}''$ der e'_x und e''_x, aus denen sich e_x zusammen-nicht verwendet werden dürfen. Innerhalb der Teilfolgen der e'_x

und $e_\varkappa''$ bleiben aber die Grenzwerte W' und W'' nach Satz 4 unverände somit ändert sich auch W nach (28) nicht. Geht man statt von d Gesamtheit aller Elemente (e) nur von jenen aus, deren Merkmal ein von zwei Teilmengen A und B angehört, wie es Forderung II vorschreib so besteht dieselbe Zurückführbarkeit auf die Auswahl aus (e') bzw. $(e''$ Wir haben somit

Satz 20. *Zwei Kollektivs K' und K'' mit den Elementfolgen $(e$ und (e''), den Verteilungen W' und W'' sowie den k'- bzw. k dimensionalen Merkmalen $\bar{x}'$ und $\bar{x}''$ bestimmen als ihre „Verbindung ein neues Kollektiv K: seine Elemente (e) sind die paarweise Zusamme fassung je eines Elementes von (e') mit dem gleichlaufenden Element v (e''), die Merkmale $\bar{x}$ bestehen aus den k' Komponenten von $\bar{x}'$ und d k'' von $\bar{x}''$ nach Gleichung (29) und die neue Verteilung ist durch (2 oder durch*

$$W(\bar{x}) = W'(\bar{x}') \cdot W''(\bar{x}'') \tag{30}$$

gegeben, bei dem durch (29) festgelegten Zusammenhang zwischen $\bar{x}$, und $\bar{x}''$.

Die Gleichung (30) ist, wie man leicht erkennt, nur ein speziell Fall von (28), da den Punkten $\xi_\iota' \leqq x_\iota'$ $(\iota = 1, 2, \ldots, k')$ und $\xi_\iota'' \leqq$ $(\iota = 1, 2, \ldots, k'')$ als A' bzw. A'' eben die Punkte $\xi_\iota \leqq x_\iota$ $(\iota = 1, 2, \ldots,$ als A entsprechen.

Beispiele: 1) K' und K'' bestehe je aus den Würfen mit eine Würfel, die Einzelwahrscheinlichkeiten seien[16]) $\mathfrak{w}_1' \ldots \mathfrak{w}_6'$ bzw. $\mathfrak{w}_1'' \ldots \mathfrak{w}$ Die Verbindung hat zum Element ein Paar gleichzeitiger (oder irgendw aufeinander bezogener) Würfe mit jedem der beiden Würfel, das Merkm ist zweidimensional und wird durch das beim Doppelwurf erscheinen Zahlenpaar dargestellt. Man findet ohne Schwierigkeit

$$\mathfrak{w}_{\varkappa,\lambda} = \mathfrak{w}_\varkappa' \cdot \mathfrak{w}_\lambda'', \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, \tag{31'}$$

als die Wahrscheinlichkeit dafür, mit dem ersten Würfel $\varkappa$, mit de zweiten λ zu treffen. 2) K' und K'' bestehe aus je einer Folge von blin lings gegen eine Scheibe abgegebenen Schüssen; $w_1(x, y)$ bzw. $w_2(x,$ sei die Wahrscheinlichkeitsdichte, für das Treffen einer bestimmten Ste xy der Scheibe. Die Verbindung hat das 4dimensionale Merkmal x_1 $x_2 y_2$ und die neue Wahrscheinlichkeitsdichte dafür, daß ein Schuß ersten Folge nach $x_1 y_1$, ein Schuß der zweiten nach $x_2 y_2$ falle, ist

$$w(x_1, y_1, x_2, y_2) = w_1(x_1, y_1) \cdot w_2(x_2, y_2). \tag{31''}$$

Wir können daher allgemein erklären:

Satz 21. *Die Verbindung zweier Kollektivs mit arithmetischer V teilung liefert wieder ein solches, und zwar ist die Einzelwahrscheinli*

it $\mathfrak{w}(\bar{x})$ *eines Punktes* $\bar{x}$, *dessen* $k = k' + k''$ *Koordinaten gleich den Koordinaten von* $\bar{x}'$ *und den* k'' *von* $\bar{x}''$ *sind*:

2′) $$\mathfrak{w}(\bar{x}) = \mathfrak{w}'(\bar{x}') \cdot \mathfrak{w}''(\bar{x}'').$$

ie Verbindung zweier Kollektivs mit geometrischer Verteilung liefert enfalls ein solches wieder, und zwar ist die neue Wahrscheinlichkeits-chte bei analoger Bedeutung von $\bar{x}, \bar{x}', \bar{x}''$ *gegeben durch*

2″) $$w(\bar{x}) = w'(\bar{x}') \cdot w''(\bar{x}'').$$

Wir haben nun nur noch eine etwas allgemeinere Art der Verbindung besprechen, bei der neben dem einen Kollektiv K' mit dem k'-mensionalen Merkmal $\bar{x}'$ und der Verteilung $W'(\bar{x}')$ *eine Schar von ollektivs* mit der k''-dimensionalen Verteilung $W''(\bar{x}''; \bar{x}')$ gegeben ist, so so, daß das Merkmal von K' (oder eine Funktion desselben) als arameter in der Verteilungsfunktion der Schar auftritt. Die Verbindung ird jetzt ebenso definiert wie früher, nur mit dem Beisatz, daß das lement $e_\varkappa''$, das mit $e_\varkappa'$ zu dem neuen Element $e_\varkappa$ verbunden wird, jenem ollektiv der Schar zu entnehmen ist, für das der Parameterwert gerade eich dem Merkmal von $e_\varkappa'$ ist. Die Überlegungen, die zu den Sätzen 20 nd 21 geführt haben, bleiben ganz ungeändert und wir erhalten

Satz 22. *Ein Kollektiv* K' *mit den Elementen* (e') *und der Ver-ilungsfunktion* $W'(\bar{x}')$ *sowie eine Schar von Kollektivs* K'', *in deren erteilungsfunktion* $W''(\bar{x}''; \bar{x}')$ *das Merkmal von* K' *als Parameter auf-itt, bestimmen als ihre „Verbindung" ein neues Kollektiv* K *mit der erteilung* $W(\bar{x})$: *die Elemente* (e) *von* K *sind die paarweise Zusammen-ssung je eines Elementes* $e_\varkappa'$ *von* K' *mit dem gleichstelligen Element* $e_\varkappa''$ *esjenigen Kollektivs der Schar* K'', *dessen Parameterwert mit dem Merk-al von* $e_\varkappa'$ *übereinstimmt; die neuen Merkmale werden wie in Satz* 20 *ebildet, die neue Verteilungsfunktion ist*

3) $$W(\bar{x}) = \int^{(\bar{x}')} W''(\bar{x}''; \bar{\xi}')\, dW'(\bar{\xi}'),$$

as Integral erstreckt über alle $\bar{\xi}'$, *für die* $\xi_\iota' \leqq x_\iota'$ $(\iota = 1, 2, \ldots, k')$. *ind die gegebenen Verteilungen arithmetisch bzw. geometrisch, so gilt asselbe für die abgeleitete, und zwar ist im ersten Falle*:

3′) $$\mathfrak{w}(\bar{x}) = \mathfrak{w}'(\bar{x}') \cdot \mathfrak{w}''(\bar{x}''; \bar{x}')$$

nd im zweiten:

3″) $$w(\bar{x}) = w'(\bar{x}') \cdot w''(\bar{x}''; \bar{x}').$$

Um ein *Beispiel* für eine derartige „Verbindung abhängiger Kollektivs" geben, knüpfen wir an das oben besprochene zweite Beispiel der Teilung n. Wenn eine Urne a schwarze und b weiße Kugeln enthält, so nimmt

man in der Regel an, daß die Wahrscheinlichkeit eines schwarzen Zug $a:(a+b)$, die eines weißen $b:(a+b)$ ist. Haben wir nun wie ob eine Menge von Urnen mit verschiedenen Mischungsverhältnissen $a:b=a$ derart, daß die Wahrscheinlichkeit eine Urne mit bestimmtem x_1-We anzutreffen, $\mathfrak{w}'(x_1)$ beträgt, so ist damit ein Kollektiv K' gegeben. D zweite Kollektiv habe zum Element einen dreimaligen Zug aus der Ur und zum Merkmal die Zahl x_2 der gezogenen weißen Kugeln. Die Wal scheinlichkeit, gerade x_2 weiße zu ziehen, ist von x_1 abhängig, und zw

$$\mathfrak{w}''(x_2; x_1) = \binom{3}{x_2} \left(\frac{x_1}{1+x_1}\right)^3 \left(\frac{1}{x_1}\right)^{x_2}. \quad (x_2 = 0, 1, \ldots,$$

Die Verbindung der beiden Kollektivs liefert die Wahrscheinlichkeit

$$\mathfrak{w}(x_1, x_2) = \mathfrak{w}'(x_1)\,\mathfrak{w}''(x_2; x_1)$$

dafür, daß ein Zug einerseits x_2 weiße Kugeln ergibt, andrerseits ein Urne mit dem Mischungsverhältnis x_1 entstammt. Dieses $\mathfrak{w}$ war in d oben behandelten Aufgabe der Teilung als gegeben vorausgesetzt.

Mit den vier Operationen der *Auswahl*, *Mischung*, *Teilung* und *V bindung*, deren Definitionen hier noch einmal übersichtlich zusamme gestellt sind, ist die Gesamtheit der einfachen, d. h. nicht weiter zurückfül

Übersicht der einfachen Operationen.

	Gegeben	Neue Elemente	Neues Merkmal	Neue Verteilung
Auswahl	1 Kollektiv K (e), $\bar{x}$, W_A	(e') = zulässige Auswahl aus (e)	$\bar{x}' = \bar{x}$	$W'_{A'} = W_{A'}$
Mischung	1 Kollektiv K (e), $\bar{x}$, W_A	$(e') = (e)$	Transformation $\bar{x}' = \bar{f}(\bar{x})$	$W'_{A'} = W_A$ A' = Transform. von
Teilung	1 Kollektiv K (e), $\bar{x}$, W_A	(e') = jene (e), deren Merkmal M' angehört	$\bar{x}' = \bar{x}$	$W'_{A'} = \frac{W_A}{W_{M'}}$ A = Durchschnitt A'
Verbindung	2 Kollektivs K', K'' (e'), (e''); $\bar{x}'$, $\bar{x}''$; $W'_{A'}$, $W''_{A''}$	e_x = Zusammenfassung von e'_x und e''_x	$\bar{x}$ = Zusammenfassung von $\bar{x}'$ und $\bar{x}''$	$W_A = W'_{A'} \cdot W''_{A''}$
	1 Kollektiv K' und 1 Schar K'' (e'), (e''); $\bar{x}'$, $\bar{x}''$ $W'(\bar{x}')$, $W''(\bar{x}''; \bar{x}')$			$W(\bar{x}) = \int W''(\bar{x}''; \bar{\xi}')\, d$

baren Ableitungen neuer Kollektivs aus gegebenen erschöpft, wenn n sämtliche Probleme, die bisher innerhalb der Wahrscheinlichkeitsrechn

handelt wurden, in Betracht zieht. Ob unsere Definition des Kollektivs ch wesentlich anderen Möglichkeiten überhaupt Raum läßt, muß zuchst unentschieden bleiben, darf aber als unwahrscheinlich gelten. Jedenlls könnte man die Wahrscheinlichkeitsrechnung in dem Umfang, in dem heute zur Lösung konkreter Probleme bereit steht, auch in der Weise fbauen, daß man an Stelle unserer Aufstellungen von § 1 *die entrechend formulierten Sätze* 14 *bis* 22, *also Definitionen für die Auswahl, Mischung, Teilung und Verbindung*, treten läßt.

§ 5. Zusammengesetzte Operationen.

Die Erörterung der zusammengesetzten Operationen, durch die neue ollektivs aus gegebenen abgeleitet werden, umfaßt den gesamten Inhalt r Wahrscheinlichkeitsrechnung; es ist daher selbstverständlich, daß wir er nur wenige, besonders charakteristische Beispiele hervorheben können. nächst ist der folgende Satz ohne weiteres einleuchtend:

Satz 23. *Die Wiederholung einer Auswahl, Mischung oder Teing liefert wieder eine (einfache) Auswahl, bzw. Mischung oder Teing; die Wiederholung einer Verbindung zweier unabhängiger Kollektivs hrt zu einer „mehrfachen" Verbindung oder „Verbindung dreier Kolktivs", bei der die drei gegebenen Verteilungsfunktionen als Faktoren nes Produktes, das der neuen Verteilung gleich ist, auftreten.*

Der letzte Teil des Satzes läßt sich leicht auch auf den Fall der erbindung abhängiger Kollektivs (§ 4, Satz 22) ausdehnen.

Unter den zahlreichen Möglichkeiten einer Zusammensetzung *zweier rschiedener* Grundoperationen sind besonders zwei erwähnenswert: Eine ehrmalige) Auswahl und darauf folgende Verbindung der durch Ausahl gebildeten Kollektivs, sowie eine Teilung durch Festlegung einzelner erkmalkomponenten (Satz 19) nach voraufgegangener Mischung, durch e die Verteilung hinsichtlich dieser Komponenten zu einer arithmetischen macht wurde. Der erste Fall liegt z. B. vor, wenn nach der Wahrheinlichkeit gefragt wird, mit einem Würfel in zwei aufeinander folgen- n Würfen eine bestimmte Kombination $\varkappa$-λ zu werfen. Hier werden erst alle Würfe mit ungeradem, dann die mit geradem Index „ausgeählt". Wir haben folgenden, einer etwas allgemeineren Fragestellung recht werdenden

Satz 24. *Werden aus einem Kollektiv K mit der Verteilung W_A urch verschiedene zulässige Auswahlen die Kollektivs K' und K'' gebildet, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Merkmalombination A-B oder B-A innerhalb der Verbindung von K' und K''*

gleich $W_A \cdot W_B$. Sind $A, B, C \ldots$ einander ausschließende Teilmenge der Merkmalmenge, so liefert die Entwicklung von

$$(W_A + W_B + W_C + \ldots)^2 \tag{34}$$

die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Kombinationen A-B, A-C usf.

Man kann hier — mit einer gewissen Ungenauigkeit — von ein Verbindung eines Kollektivs „mit sich selbst" sprechen. Die Ausdehnur des Satzes auf mehr als zweimalige Auswahl und zugehörige mehrfach Verbindung (höhere Potenzen des Klammerausdruckes (34)) liegt auf d Hand.

Als Beispiel für den zweiten oben angeführten Fall einer zweifache Zusammensetzung (aus Mischung und Teilung) kann folgendes gelte Elemente des gegebenen Kollektivs K seien die blindlings gegen ei Scheibe abgegebenen Schüsse und es sei die (auf die Fläche bezogen Wahrscheinlichkeitsdichte für einen Scheibenpunkt mit den Polarkoordin ten r, φ gleich $w(r, \varphi)$. Gefragt wird nach der eindimensionalen Wah scheinlichkeitsdichte $w'(r)$ dafür, daß ein Schuß, von dem man sch weiß, daß er im ersten Quadranten liegt, in die Entfernung r trifft. M nimmt zunächst eine Mischung vor, indem man allen Scheibenpunkte für die $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ bei beliebigem r, die Punkte $(r, 1)$ und allen ander die Punkte $(r, 0)$ eines neuen Merkmalraumes zuordnet. Hierauf teilt m nach Satz 19, indem man die zweite Merkmalkoordinate auf den Wert festlegt und sie dann in der Angabe des Resultates wegläßt:

$$w'(r) = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\, w(r, \varphi)\, d\varphi}{\int_{-\infty}^{\infty} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\, w(r, \varphi)\, d\varphi} = \text{konst.} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\, w(r, \varphi)\, d\varphi .$$

Man sieht, daß die Reihenfolge der beiden einfachen Operation hier vertauscht werden könnte; dadurch würde auch vermieden, daß m als Zwischenresultat mit einer Verteilung zu tun hat, die nach unser Definitionen in § 3 weder arithmetisch noch geometrisch ist. Von der Satz 19 behandelten „Festlegung einzelner Koordinaten" (als Sonderf der Teilung) unterscheidet sich die jetzt in Rede stehende zusamme gesetzte Operation nur dadurch, daß nicht *ein* fester Wert für d Winkel φ, sondern ein Wert*bereich* vorgegeben ist. Wir sprechen dah auch hier von einer „Festlegung" und erhalten:

Satz 25. *Aus einem Kollektiv K mit dem k-dimensionalen Me mal $\bar{x}$ und der Verteilung $W(\bar{x})$ entsteht durch „Festlegung der k_1 < Komponenten $x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}$ von $\bar{x}$ auf eine bestimmte k_1-dimensione*

unktmenge A_1" ein neues Kollektiv K': die neuen Elemente (e') sind le jene Elemente von K, in deren Merkmal die ersten k_1-Komponenten r Menge A_1 angehören, das neue Merkmal besteht aus den restlichen $= k - k_1$ Komponenten von $\bar{x}$; die neue, k'-dimensionale Verteilung t bestimmt durch

$$W'_{A'} = \text{konst.} \int_{(A_1, A')} d\,W(\bar{\xi})\, d\,X_1\, d\,X', \tag{35}$$

enn das Integral hinsichtlich der ersten k_1 Koordinaten über A_1, hinchtlich der übrigen über A' erstreckt, und konst. *aus der Bedingung $W'_{M'} = 1$, wo M' den k'-dimensionalen Gesamtraum (bzw. die Projektion r ursprünglichen Merkmalmenge M auf diesen) bezeichnet, bestimmt wird.*

Diese Operation der „Festlegung" ist deshalb wichtig, weil sie dem pezialfall der Mischung, bei der k_1 Komponenten des Merkmales ausschieden werden, gewissermaßen *dual gegenübersteht.* Das eine Mal verhwinden die Komponenten dadurch, daß es auf ihren Wert überhaupt nicht ankommt", das andere Mal dadurch, daß ihre Werte bis zu einem ewissen Grade bekannt sind. Der zweite Fall geht in den ersten über, enn A_1 *alle* Werte umfaßt, deren die $x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}$ überhaupt fähig sind; s konst. vor dem Integralzeichen in (35) wird dann 1. Wir begegnen r Dualität der beiden Operationen wieder bei der Definition der „Falng" und der „Kreuzung", wie bei den *beiden Gesetzen der großen Zahl* nd schließlich bei den beiden *Fundamentalsätzen der Wahrscheinlichitsrechnung,* die an anderer Stelle entwickelt wurden[1]).

Wir wenden uns nun zu Zusammensetzungen aus *mehr als zwei einchen Operationen* und stellen die Besprechung von zwei speziellen Proemen, die in der Literatur viel behandelt wurden, voran. Beim soenannten *Petersburger Problem* liegt eine Verabredung zwischen zwei pielern A und B vor, wonach A den Betrag $f(m) = 2^{m-1}$ erhalten soll, enn beim fortgesetzten Werfen einer Münze die Wappenseite zum erstenal im m-ten Wurf erscheint. Die „mathematische Hoffnung" für A eträgt nach der üblichen Auffassung

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \ldots + \frac{1}{2^m} \cdot 2^{m-1} = \infty. \tag{36}$$

a es aber offenbar widersinnig erscheint, daß die Gewinnaussichten für A nen unendlich großen Einsatz rechtfertigen sollten, hat schon J. Bernoulli ne diesem Fall angepaßte Theorie der „moralischen" Hoffnung (im Gegentz zur „mathematischen") entwickelt, die uns hier nicht zu beschäftigen raucht[18]). Für uns liegt die Sache so, daß hier zunächst überhaupt *kein*

[18]) Vgl. z. B. das Referat bei E. Czuber, loc. cit. [9]), S. 269.

Kollektiv definiert, d. h. keine bestimmte, ins Unendliche fortsetzbare Folge von Einzelspielen verabredet ist: Ein einzelner Wurf kann das Spiel nicht darstellen, da er ja kein den Gewinn entscheidendes Merkmal aufweist. Man gelangt nur in der Weise zu einem Kollektiv und damit zur Möglichkeit einer Anwendung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes, daß man von vornherein festsetzt, ein Spiel bestehe aus einer bestimmten Zahl von n Würfen. Wir haben dann im Sinne von Satz 24 und der beigefügten Bemerkung eine *n-malige Auswahl* aus dem von den Einzelwürfen gebildeten Kollektiv und darauf folgende *n-fache Verbindung*. Jede Kombination von n Wurfergebnissen hat die Wahrscheinlichkeit 2^{-n}, wenn Schrift- und Wappenseite als gleich wahrscheinlich (also $\mathfrak{w} = \frac{1}{2}$) angenommen werden. Das den Gewinn entscheidende Merkmal eines gesamten Spielergebnisses ist die Nummer m des Wurfes, bei dem zum erstenmal Wappen erscheint, wobei wir noch willkürlich $m = 0$ für ein Ergebnis von lauter Schriftseiten festsetzen wollen. Da es bei $m \geqq$ jedesmal 2^{n-m} verschiedene Kombinationen gibt, für die die ersten m Stellen unverändert bleiben, so ist die Verteilung unseres durch *Mischung* hervorgehenden endgültigen Kollektivs nach Satz 17 durch

$$(36') \qquad \mathfrak{w}(0) = 2^{-n}, \quad \mathfrak{w}(m) = 2^{-m} \quad \text{für } m = 1, 2, \ldots, n$$

gegeben und die „mathematische Hoffnung" des Gewinnes ist nach (19c)

$$(36'') \qquad \sum_{m=0}^{n} f(m)\,\mathfrak{w}(m) = \frac{a_0}{2^n} + \sum_{m=1}^{n} \frac{2^{m-1}}{2^m} = \frac{n}{2} + \frac{a_0}{2^n},$$

wenn a_0 der für das Ergebnis $m = 0$ verabredete Gewinn $f(0)$ ist. An diesem Resultat ist nichts mehr zu beanstanden. — Natürlich kann das Spiel auch anders festgelegt werden, z. B. so, daß nach n Würfen A für jede von einem Wappenwurf gefolgte „reine Gruppe" von m Schriftergebnissen, die innerhalb des Spieles auftrat, den Betrag 2^m erhält. Hierbei ergibt sich die mathematische Hoffnung oder der „gerechte" Einsatz für A entsprechend höher, nämlich gleich

$$(36''') \qquad \frac{a_0}{2^n} + \sum_{m=0}^{n-1} 2^m a'_m = \frac{a_0}{2^n} + \frac{1}{4} \sum_{m=0}^{n-1} (n - m - 1) + \frac{n}{2} = \frac{n(n-1)}{8} + \frac{n}{2} +$$

weil die Erwartungszahl a'_m der „reinen Gruppen" zu m innerhalb einer Serie von n Würfen $(n - m - 1)\,2^{-m-2} + 2^{-m-1}$ beträgt.

Dieses Problem der *„reinen Gruppen"*, das K. Marbe in den Mittelpunkt seiner Kritik der Wahrscheinlichkeitsrechnung gestellt hat[19]), ist

[19]) K. Marbe, Naturphilosophische Untersuchungen zur Wahrscheinlichkeitslehre, Leipzig 1899; ferner: Die Gleichförmigkeit in der Welt, München 1916 sowie Mathemat. Bemerkungen z. m. Buch „Die Gleichförmigkeit i. d. Welt", München 191

s zweite spezielle Beispiel wiederholter Zusammensetzung, das wir hier rz betrachten wollen. Das Ausgangs-Kollektiv K bestehe etwa aus den feinanderfolgenden Geburteneintragungen in ein Standesamtsregister, ren Merkmal 0 oder 1 sei, je nachdem eine weibliche oder männliche burt vorliegt. Die zugehörigen, gegebenen Einzelwahrscheinlichkeiten en p, q mit $p+q=1$. Man bildet zunächst n neue Kollektivs $_1, K_2, \ldots, K_n$ durch verschiedene *Auswahlen*, indem man die mod n ngruenten Indizes zusammenfaßt, und dann aus diesen $K_1, K_2, \ldots, K_n$ rch *Verbindung* ein weiteres Kollektiv K_0 mit n-dimensionalem Merkal. Die Merkmalmenge von K_0 besteht aus den 2^n Eckpunkten des nheitswürfels, und jedem entspricht die Einzelwahrscheinlichkeit $p^\alpha q^{n-\alpha}$, enn unter seinen Koordinaten genau α verschwinden. Schließlich wird rch *Mischung* aus K_0 das endgültige Kollektiv K' gewonnen, bei dem s Merkmal die Zahl x der in der Koordinatenfolge enthaltenen reinen ruppen zu m (d. s. ununterbrochene Folgen von genau m Nullen oder nsern) auftritt. Bei kleinem n kann man die 2^n verschiedenen Koordiatenfolgen unmittelbar übersehen und daher die nach (24′) erforderliche ddition leicht durchführen, z. B. für $n=5$, $m=2$ werden die Wahrheinlichkeiten innerhalb K':

$$\mathfrak{w}'(0) = p^5 + q^5 + 2p^2q^2(p+q) + 4pq(p^3+q^3) = 1 - pq - 5p^2q^2,$$

$$\mathfrak{w}'(1) = 6p^2q^2(p+q) = 6p^2q^2,$$

$$\mathfrak{w}'(2) = 2p^2q^2(p+q) + pq(p^3+q^3) = pq - p^2q^2.$$

Damit ist die Aufgabe grundsätzlich erledigt, wenn auch die numeche Berechnung der $\mathfrak{w}'$ bei großem n auf diese Weise nicht möglich . Es lassen sich aber in allen Fällen verhältnismäßig einfache Formeln r den Mittelwert, die Streuung und, wenn nötig, auch die höheren Moente der durch die $\mathfrak{w}'$ bestimmten Verteilung angeben[20]). Ein großer Teil r überaus umfangreichen Literatur über diesen Gegenstand geht mangels ner klaren Definition des betrachteten Kollektivs gänzlich in die Irre[21]).

Wir kommen nun zur allgemeinen Definition der beiden n-fach zummengesetzten Operationen, die — im Limes für $n=\infty$ — den Gegenand der Fundamentalsätze und der im folgenden abzuleitenden Gesetze

[20]) Vgl. R. v. Mises, Marbes Gleichförmigkeit in der Welt und die Wahrscheinhkeitsrechnung, Die Naturwissenschaften 7 (1919), S. 168 ff.

[21]) Z. B. H. Grünbaum, Isolierte und reine Gruppen, Würzburg 1904. Über e gesamte Literatur vgl. L. v. Bortkiewicz, Die Iterationen, Berlin 1917. Hier d in den weitläufigen Aufstellungen von H. Bruns, Abh. d. math.-phys. Kl. d. gl. sächs. Ges. d. Wiss. 29, 1906, S. 577, stimmen die Ergebnisse mit den im Text gebenen Andeutungen überein.

der großen Zahl bilden. Bei der *Faltung* handelt es sich um eine Ve bindung von n unabhängigen, k-dimensionalen Kollektivs und darau folgende *Mischung*, durch die das Merkmal wieder auf ein k-dimensional reduziert wird. Bei der *Kreuzung* haben wir eine Verbindung von n Ko lektivs mit $k_1, k_2, \ldots, k_n$-dimensionalem Merkmal, die alle von eine k-dimensionalen abhängen, mit diesem, und darauffolgende *Festlegun* die nur das k-dimensionale Merkmal übrig läßt[22]).

Ein Beispiel für die *lineare Faltung* bildet etwa die Frage na der Wahrscheinlichkeit dafür, aus n Urnen, die, nebeneinander aufgestel beliebig bezifferte Lose enthalten, in einmaligem Zug eine bestimm Summe x zu ziehen. Sind $\mathfrak{v}_\varkappa(x_\iota)$ die Einzelwahrscheinlichkeiten für d Ziehungsergebnisse x_ι in den verschiedenen Urnen $(\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$, wird die Frage beantwortet durch

$$\mathfrak{w}_n(x) = \sum_{x_1 \ldots x_n} \mathfrak{v}_1(x_1)\, \mathfrak{v}_2(x_2) \ldots \mathfrak{v}_n(x_n), \qquad (x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x$$

wie man durch Verbindung von (24′) und (32′) erkennt. Allgemein gi mit Rücksicht auf (22) und (30):

Satz 26. *Aus n Kollektivs $C_1, C_2, \ldots, C_n$ mit den k-dimensionale Merkmalen $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ und den Verteilungsfunktionen $V_1(\bar{x}_1), V_2(\bar{x}_2)$ $\ldots, V_n(\bar{x}_n)$ läßt sich durch „lineare Faltung" ein neues Kollektiv K mit k-dimensionalem Merkmal $\bar{x}$ und der Verteilungsfunktion $W_n(\bar{x})$ a leiten: die Elemente von K_n sind die Zusammenfassung der gleichlaufe den Elemente von $C_1 \ldots C_n$ und das Merkmal eines solchen Element die lineare Funktion der Merkmale seiner Bestandteile:*

$$(38) \qquad \bar{x} = h_1^{(n)}(\bar{x}_1 - \bar{c}_1^{(n)}) + h_2^{(n)}(\bar{x}_2 - \bar{c}_2^{(n)}) + \ldots + h_n^{(n)}(\bar{x}_n - \bar{c}_n^{(n)})$$

mit $h_\iota^{(n)}$ und $c_\iota^{(n)}$ als Konstanten; die neue Verteilung wird durch

$$(39) \qquad W_n(\bar{x}) = \int\int \ldots \int V_n(\bar{x}_n)\, d\, V_{n-1}(\bar{x}_{n-1})\, d\, V_{n-2}(\bar{x}_{n-2}) \ldots d\, V_1(\bar{x}_1)$$

bestimmt, wobei für $\bar{x}_n$ der Wert aus (38), also

$$(38') \qquad \bar{x}_n = \bar{c}_n^{(n)} + \frac{1}{h_n^{(n)}}\left[\bar{x} - h_1^{(n)}(\bar{x}_1 - \bar{c}_1^{(n)}) - \ldots - h_{n-1}^{(n)}(\bar{x}_{n-1} - c_{n-1}^{(n)})\right]$$

zu setzen und über alle Werte der Variablen $\bar{x}_1$ bis $\bar{x}_{n-1}$ zu integrier ist. Sind alle $h = 1$ bzw. $\frac{1}{n}$, so nennen wir die Operation eine „Summe bzw. Durchschnittsbildung". Sind alle gegebenen Verteilungen arithmetis bzw. geometrisch, so gilt neben (39)

$$(39') \qquad \mathfrak{w}_n(\bar{x}) = \sum \mathfrak{v}_1(\bar{x}_1)\, \mathfrak{v}_2(\bar{x}_2) \ldots \mathfrak{v}_n(\bar{x}_n),$$

[22]) Vgl. hierzu auch „Fundamentalsätze", S. 76 und 91.

zw.

$$39'') \quad w_n(\bar{x}) = \int\int \dots \int w_1(\bar{x}_1)\, w_2(\bar{x}_2) \dots w_n(\bar{x}_n)\, dX_1\, dX_2 \dots dX_{n-1},$$

enn die Summation bzw. Integration analog wie oben, nach Einsetzen ir $\bar{x}_n$ aus (38'), über alle $\bar{x}_1 \dots \bar{x}_{n-1}$-Werte bei festem $\bar{x}$ erstreckt wird.

Bildet man das Stieltjessche Integral (39) nach der in (12) ge-ebenen Definition, so kann eine Unbestimmtheit beim Grenzübergang adurch entstehen, daß $V_n(\bar{x})$ nicht stetig ist. Es ist leicht einzusehen, aß man der Definition in § 3 jetzt die Bestimmung hinzufügen muß, aß der *obere* Grenzwert der Summe rechts in (12) zu nehmen ist, damit $_n(\bar{x})$ in (39) eine nach *oben* halbstetige Funktion wird. —

Ein Beispiel für die *lineare Kreuzung* liefert die Fragestellung der ehlertheorie nach der Wahrscheinlichkeit einer aus Beobachtungen ge-lgerten Annahme für den „wahren Wert" einer Größe. Es liege eine nbegrenzte Zahl linearer Strecken, die l verschiedene Längen $x_1, x_2, \dots, x_l$ esitzen, vor, und es betrage die Wahrscheinlichkeit dafür, gerade eine recke von der Länge x_λ anzutreffen, $\psi(x_\lambda)$, so daß

$$\sum_{\lambda=1}^{l} \psi(x_\lambda) = 1.$$

in zweites Kollektiv habe zu Elementen die wiederholten Messungen ner und derselben Strecke von der Länge x_λ und zu Merkmalen das je-eilige Messungsergebnis. Die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Er-bnisses y_μ ist natürlich abhängig von dem Wert der Länge x_λ und sei urch $\varphi(y_\mu - x_\lambda)$ gegeben, wobei man $y_\mu - x_\lambda$ den „Fehler" der Messung nd φ die „Fehlerfunktion" nennt. Wieder gilt, und zwar bei be-ebigem x_λ:

$$\sum_{\mu=1}^{m} \varphi(y_\mu - x_\lambda) = 1.$$

in neues Kollektiv, das aus den beiden gegebenen (genauer: aus dem sten Kollektiv und der Schar der zweiten) gebildet wird, hat Elemente, e bestehen: 1. aus dem Herausgreifen einer der vorliegenden Strecken; aus der Vornahme einer Messung dieser Strecke. Merkmal sind die änge x_λ und das Messungsergebnis y_μ. Es liegt hier genau der Fall des tzes 22 (Verbindung abhängiger Kollektivs) vor, und die Wahrschein-hkeit, mit der eine „wahre" Länge x_λ und eine „gemessene" y_μ zu warten sind, ist nach (33'):

$$0) \qquad \mathfrak{w}(x_\lambda, y_\mu) = \psi(x_\lambda)\, \varphi(y_\mu - x_\lambda).$$

ragen wir jetzt nach der Wahrscheinlichkeit $\mathfrak{w}(x_\lambda)$ dafür, daß bei be-nntem Messungsergebnis y_1 die wahre Länge x_λ sei, so haben wir im

Sinne von Satz 19 eine Teilung und speziell eine Festlegung der zweite Koordinate, woraus folgt [nach (27′)]:

$$\mathfrak{w}(x_\lambda) = \frac{\psi(x_\lambda)\,\varphi(y_1 - x_\lambda)}{\sum_{\lambda=1}^{l} \psi(x_\lambda)\,\varphi(y_1 - x_\lambda)}. \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, \tag{41}$$

Die Aufgabe wird grundsätzlich nicht geändert, wenn statt einer Messur deren n vorgenommen werden und nach der Wahrscheinlichkeit $\mathfrak{w}(x$ gefragt ist, daß x einen bestimmten Wert bei gegebenen n Messung resultaten besitzt. Wir können, indem wir $y_1, y_2, \ldots, y_n$ für die n g gebenen Werte und $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ für die einzelnen Fehlerfunktione schreiben (die ja nicht bei allen Messungen gleich sein müssen) ansetzen

$$\mathfrak{w}(x_\lambda) = \text{konst.}\ \psi(x_\lambda)\cdot\varphi_1(y_1 - x_\lambda)\cdot\varphi_2(y_2 - x_\lambda), \ldots, \varphi_n(y_n - x_\lambda) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l) \tag{42}$$

mit dem Beisatz, daß konst. aus der Bedingung

$$\sum_{\lambda=1}^{l} \mathfrak{w}(x_\lambda) = 1 \tag{42′}$$

zu bestimmen sei. In der herkömmlichen Fehlertheorie pflegt man ψ fi alle in Betracht kommenden x-Werte als gleich anzusehen, so daß $\psi(x$ ganz aus dem Ansatz (42) herausfällt. Überdies werden die weitere Schlüsse stets unter der Annahme, daß auch alle Fehlerfunktionen gleic sind, durchgeführt. Wir formulieren das allgemeinere Problem der „linear Kreuzung“ und seine aus Satz 22 und Satz 19 folgende Lösung in

Satz 27. *Gegeben seien ein Kollektiv C mit der k-dimensionale Verteilung $V(\bar{x})$ und n von C abhängige Kollektivs (Scharen von Kollektiv $C_1, C_2, \ldots, C_n$ mit den Verteilungsfunktionen $V_1(\bar{x}_1; \bar{y}_1)$, $V_2(\bar{x}_2; \bar{y}_2)$, .. $V_n(\bar{x}_n, \bar{y}_n)$, wo die k-dimensionalen Parameter $\bar{y}_\varkappa$ durch lineare B ziehungen*

$$\bar{y}_\varkappa = c_\varkappa + h_\varkappa \bar{x} \tag{43}$$

mit $\bar{x}$ verknüpft sind, sowie für jeden der Merkmalräume von C_1, C $\ldots, C_n$ eine Punktmenge $A_1, A_2, \ldots, A_n$; durch „lineare Kreuzung“ er steht hieraus ein neues Kollektiv K_n mit der Verteilungsfunktion $W_n(\bar{x}$ es hat zu Elementen jene Zusammenfassungen eines Elementes von C n den gleichlaufenden und gleichem $\bar{x}$-Wert entsprechenden Elementen v C_1 bis C_n, für die $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ der betreffenden Punktmengen $A_1, A_2, \ldots,$ angehört und zu Merkmalen die Werte von $\bar{x}$; die neue Verteilung ist

$$W_n(\bar{x}) = \text{konst.} \int^{(\bar{x})} f_1(\bar{c}_1 + h_1\bar{\xi})\cdot f_2(\bar{c}_2 + h_2\bar{\xi}) \ldots f_n(\bar{c}_n + h_n\bar{\xi})\, dV(\bar{\xi}) \tag{44}$$

Integral genommen für alle $\xi_\iota \leqq x_\iota (\iota = 1, 2, \ldots, k)$, *wobei*

$$f_\varkappa(\bar{y}_\varkappa) = \int_{(A_\varkappa)} d V_\varkappa(\bar{x}_\varkappa; \bar{y}_\varkappa) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$$

d konst. *aus der Bedingung* $W_n(\overline{\infty}) = 1$ *zu bestimmen ist. Haben* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *durchwegs arithmetische Verteilung und reduzieren h die* $A_\varkappa$ *auf Einzelpunkte* $\bar{x}_\varkappa = \bar{a}_\varkappa$, *so wird aus* (44)

$$W_n(\bar{x}) = \text{konst.} \int^{(\bar{x})} \mathfrak{v}_1(\bar{a}_1; \bar{c}_1 + h_1\xi)\, \mathfrak{v}_2(\bar{a}_2; \bar{c}_2 + h_2\xi) \ldots \mathfrak{v}_n(\bar{a}_n; \bar{c}_n + h_n\bar{\xi})\, d V(\bar{\xi});$$

überdies die Verteilung von C geometrisch, so wird es auch die von K_n:

$$w_n(\bar{x}) = \text{konst.}\, \mathfrak{v}_1(\bar{a}_1; \bar{c}_1 + h_1\bar{x})\, \mathfrak{v}_2(\bar{a}_2; \bar{c}_2 + h_2\bar{x}) \ldots \mathfrak{v}_n(\bar{a}_n; \bar{c}_n + h_n\bar{x})\, v(\bar{x}).$$

Im engeren Anschluß an die übliche Ausdrucksweise der Wahrscheinlichkeitsrechnung lautet die Fragestellung dieses Satzes wenn $\bar{c}_\varkappa = 0$ und $= 1$ für alle $\varkappa$ angenommen wird, so: Man hat n Erscheinungsreihen, alle von einer „Ursache" $\bar{x}$ abhängen, deren „a priori-Wahrscheinlichkeit" durch $V(\bar{x})$ gegeben ist; gefragt wird nach der „a posteriori-Wahrscheinlichkeit" von $\bar{x}$, gefolgert aus n Beobachtungen, die an den n Erscheinungsreihen $(\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$ angestellt wurden und $\bar{x}_\varkappa = \bar{a}_\varkappa$ (bzw. angehörend $A_\varkappa$) ergeben haben. Wir wollen demgemäß im Falle $= 1$, $c_\varkappa = 0$ die lineare Kreuzung als *„Rückschluß* aus den n Beobachtungen $A_\varkappa$ an den Kollektivs $C_\varkappa$ auf die Wahrscheinlichkeit des Merkmals $\bar{x}$ in C" bezeichnen. Die durch (45) definierten $f_\varkappa$ sollen die „von den Beobachtungen herrührenden *Bewertungen* der Wahrscheinlichkeit von $\bar{x}$" heißen.

§ 6. Die Gesetze der großen Zahl.

Der Ausdruck „Gesetz der großen Zahl" wird in der neueren Literatur in sehr verschiedenem Sinne gebraucht. Bisweilen versteht man unter den allgemeinen *Erfahrungssatz*[23]), daß bei gewissen Erscheinungsreihen (wie den Würfen mit einer Münze usw.) die relative Häufigkeit des Auftretens der einzelnen Merkmale nach einer genügend großen Zahl von Wiederholungen annähernd konstant bleibt. Diese Beobachtung ist es, wie in § 2 dargelegt, die uns mittelbar zu der „Forderung I" in der Definition des Kollektivs und der Wahrscheinlichkeit geführt hat. Ein derartiges Erfahrungsresultat ist jedenfalls im mathematischen Sinne nicht beweisbar.

Poisson, von dem die Bezeichnung herrührt und auf dessen Ausführungen in der *Einleitung* zu den „Recherches sur la Probabilité des

[23]) So H. Bruns, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre, Leipzig 1906, S. 13.

Jugements“[24]) sich die erwähnte Auffassung stützt, hat aber zweifell
einen bestimmten *analytischen Satz*, mit dessen Beweis sich ein Großte
seines Buches beschäftigt, unter „Gesetz der großen Zahl“ verstande
Der von Poisson bewiesene Satz besagt: wenn aus n Urnen, die in b
liebigen Mischungs-Verhältnissen schwarze und weiße Kugeln enthalten,
einmal gezogen und die relative Häufigkeit $s:n$ der schwarzen Ziehungserge
nisse beobachtet wird, so geht die Wahrscheinlichkeit W_n dafür, daß $s:n$
der Nähe eines bestimmten, von den Mischungs-Verhältnissen abhängig
und voraus berechenbaren Wertes liegt, mit wachsendem n gegen
Daraus schließt Poisson mit Recht, daß bei zweimaliger Wiederholu
eines solchen Serienversuchs „sehr nahe und höchstwahrscheinlich d
Gleichung $s':n' = s:n$ stattfinden“[25]) werde. Hier handelt es sich al
um eine bestimmte, innerhalb der Wahrscheinlichkeitsrechnung m
deren Mitteln beweisbare Aussage, die mit der oben angeführten, bei
Aufbau des Wahrscheinlichkeitsbegriffes wesentlich verwendeten Erfahrung
tatsache *wohl verträglich, aber nicht identisch ist.* Daß über die logisc
Stellung des Poissonschen Satzes Unklarheit bestehen muß, solange d
Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht auf logisch einwandfreier Grundla
aufgebaut wird, ist leicht verständlich.

Wir werden im folgenden die eben angedeutete Aussage von Poiss
(die eine Verallgemeinerung einer von Bernoulli herrührenden ist) m
einer bestimmten Erweiterung und Präzisierung, zu der unsere prinzi
ellen Aufstellungen uns in Stand setzen, als das *„erste Gesetz der groß
Zahl“* aussprechen und beweisen. Dagegen bezeichnen wir das darüb
hinausgehende, ebenfalls von Poisson gefundene, Resultat über die asy
ptotische Form der Verteilungsfunktion W_n, das mitunter auch noch
die Aussage des Gesetzes der großen Zahl einbezogen wird, (einschließli
der analogen Ergänzungen) als den „ersten Fundamentalsatz der Wa
scheinlichkeitsrechnung“. Mit der Formulierung und dem Beweis dies
Satzes haben wir uns in einer vorausgehenden Arbeit beschäftigt[26]).

In der Ableitung des ersten Gesetzes der großen Zahl folgen w
dem überaus einfachen, von Tschebyschef und A. A. Markoff[27]) ve
gezeichneten Weg und stellen den folgenden Hilfssatz voran:

Satz 28. *Bei der Summenbildung aus zwei oder mehreren V
teilungen mit endlichen Mittelwerten und Streuungen addieren sich
Mittelwerte und Streuungen.*

[24]) Paris 1837.

[25]) Deutsche Ausgabe von C. H. Schnuse, Lehrbuch der Wahrscheinlichke
rechnung und deren wichtigsten Anwendungen, Braunschweig 1841, S. 110.

[26]) Fundamentalsätze, S. 70ff.

[27]) Vgl. A. A. Markoff, Wahrscheinlichkeitsrechnung, deutsch v. H. Liebma
Leipzig 1912, S. 58.

Was unter Summenbildung zu verstehen ist, wurde in Satz 26 finiert. Haben wir $n = 2$ Verteilungen und die Dimension der Merkale $k = 1$, so besagt der Satz 28: Es sei die Wahrscheinlichkeit, bei r Ziehung aus einer Urne höchstens den Wert x_1 zu erhalten, durch e Verteilung $V_1(x_1)$ mit dem Mittelwert a_1 und der Streuung s_1^2 (§ 3) geben, die analoge Wahrscheinlichkeit für eine zweite Urne durch $V_2(x_2)$ it dem Mittelwert a_2 nnd der Steuung s_2^2; dann hat die Wahrscheinhkeit $W_2(x)$, bei einem Doppelzug höchstens die Summe x zu bekomen, den Mittelwert $b_2 = a_1 + a_2$ und die Streuung $r_2^2 = s_1^2 + s_2^2$.

Um den Satz gleich allgemein zu beweisen, führen wir die n k-diensionalen Verteilungen $V_1(\bar{x}_1)$, $V_2(\bar{x}_2)$, ..., $V_n(\bar{x}_n)$ ein, deren Mittelrt- und Streuungskomponenten nach (14) und (15) durch

$$6) \quad a_\varkappa^{(\iota)} = \int x^{(\iota)}\, d\, V_\varkappa(\bar{x}), \quad s_\varkappa^{(\iota,\lambda)} = \int (x^{(\iota)} - a_\varkappa^{(\iota)})(x^{(\lambda)} - a_\varkappa^{(\lambda)})\, d\, V_\varkappa(\bar{x});$$

$$(\iota, \lambda = 1, 2, \ldots, k) \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$$

finiert sind. Die einzelnen Koordinatenrichtungen sind dabei durch ere Indizes gekennzeichnet, die Integrale über alle $\bar{x}$-Werte zu erecken. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Summe der ι-ten Komnenten der n Ziehungsergebnisse höchstens $x^{(\iota)}$ wird $(\iota = 1, 2, \ldots, k$, nach (39) mit (38′) gleich

$$7) \quad W_n(\bar{x}) = \int\int \ldots \int V_n(\bar{x}_n - \bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \bar{x}_3 - \ldots - \bar{x}_{n-1})\, d\, V_{n-1}(\bar{x}_{n-1}) \ldots d\, V_1(\bar{x}_1).$$

n hier die ι-te Komponente des Mittelwertes $\bar{b}_n$ zu bilden,

$$8) \quad b_n^{(\iota)} = \int x^{(\iota)}\, d\, W_n(\bar{x}),$$

t man eine nk-fache Integration über alle Komponenten von $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{n-1}$ vorzunehmen. An Stelle von $\bar{x}$ kann man aber als ue Integrations-Variable $\bar{x}_n = \bar{x} - \bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \ldots - \bar{x}_{n-1}$ einführen, wobei e Substitutions-Determinante den Wert 1 hat. Es wird sodann

$$9) \quad b_n^{(\iota)} = \int (x_1^{(\iota)} + x_2^{(\iota)} + \ldots + x_n^{(\iota)})\, d\, V_1(\bar{x}_1)\, d\, V_2(\bar{x}_2) \ldots d\, V_n(\bar{x}_n)$$

d hieraus nach Trennung der Variablen, da jedes $\int d\, V_\varkappa(\bar{x}_\varkappa) = 1$

$$10) \quad b_n^{(\iota)} = \int x_1^{(\iota)}\, d\, V_1(\bar{x}_1) + \int x_2^{(\iota)}\, d\, V_2(\bar{x}_2) + \ldots + \int x_n^{(\iota)}\, d\, V_n(\bar{x}_n) = a_1^{(\iota)} + a_2^{(\iota)} + \ldots + a_n^{(\iota)}.$$

eht man in ganz gleicher Weise bei Berechnung des Integrals

$$9) \quad r_n^{(\iota,\lambda)} = \int (x^{(\iota)} - b_n^{(\iota)})(x^{(\lambda)} - b_n^{(\lambda)})\, d\, W_n(\bar{x})$$

r, so hat man beim Übergang zu (49′) analog dem von (48) zu (48′) n Ausdruck

$$\Big(\sum_{\varkappa=1}^{n} x_\varkappa^{(\iota)} - b_n^{(\iota)}\Big)\Big(\sum_{\varkappa=1}^{n} x_\varkappa^{(\lambda)} - b_n^{(\lambda)}\Big) = \sum_{\varkappa=1}^{n}(x_\varkappa^{(\iota)} - a_\varkappa^{(\iota)}) \cdot \sum_{\varkappa=1}^{n}(x_\varkappa^{(\lambda)} - a_\varkappa^{(\lambda)}) =$$

$$= \sum_{\varkappa,\,\mu=1}^{n} (x_\varkappa^{(\iota)} - a_\varkappa^{(\iota)})(x_\mu^{(\lambda)} - a_\mu^{(\lambda)})$$

dem Produkt der Differentiale $dV_1(\bar{x}_1) \ldots dV_n(\bar{x}_n)$ voranzusetzen. D einzelnen Summanden der Doppelsumme haben nun entweder ungleic untere Indizes $\varkappa \neq \mu$ und liefern dann nach Trennung der Variablen $r_n^{(\iota,\lambda)}$ den Beitrag

$$\int (x_\varkappa^{(\iota)} - a_\varkappa^{(\iota)})\, dV_\varkappa(\bar{x}_\varkappa) \cdot \int (x_\mu^{(\lambda)} - a_\mu^{(\lambda)})\, dV_\mu(\bar{x}_\mu),$$

worin wegen der ersten Gleichung (46) jeder Faktor verschwindet, oc sie haben gleiche Indizes $\mu = \varkappa$ und ergeben dann:

$$(49'')\; r_n^{(\iota,\lambda)} = \int (x_1^{(\iota)} - a_1^{(\iota)})(x_1^{(\lambda)} - a_1^{(\lambda)})\, dV_1(\bar{x}_1) + \ldots + \int (x_n^{(\iota)} - a_n^{(\iota)})(x_n^{(\lambda)} - a_n^{(\lambda)}) d$$
$$= s_1^{(\iota,\lambda)} + s_2^{(\iota,\lambda)} + \ldots + s_n^{(\iota,\lambda)}.$$

Damit ist Satz 28 in vollem Umfang bewiesen und wir können sof die allgemeine Aussage des *ersten Gesetzes der großen Zahl* anschließ

Satz 29. *Wenn in einer unendlichen Folge k-dimensionaler V teilungen* $V_1(\bar{x}_1)$, $V_2(\bar{x}_2)$, ... *die Komponenten der Streuungen endlic Schranken besitzen*:

$$(50) \qquad |s_\varkappa^{(\iota,\lambda)}| < S^{(\iota,\lambda)}, \qquad (\iota, \lambda = 1, 2, \ldots, k;\ \varkappa = 1, 2, 3, .$$

so führt die Durchschnittsbildung aus den ersten n dieser Kollektivs einer Verteilung $W_n(\bar{x})$, *die sich mit wachsendem n mehr und mehr ihren Mittelwert konzentriert: es gibt zu beliebig klein vorgegebenen* ε *und ein* n_0, *so daß für* $n > n_0$ *die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Durchschnitt* $\bar{x}$ *der n Einzelbeobachtungen in den Bereich*

$$(50') \qquad \Big|\bar{x} - \int \bar{x}\, dW_n(\bar{x})\Big| < \varrho$$

fällt, größer als $1 - \varepsilon$ *wird.*

Um dies einzusehen, überlegen wir uns nur, daß die Durchschnit bildung, mit der wir es jetzt zu tun haben, aus der im vorigen Satz handelten Summenbildung hervorgeht, wenn man in den früheren Form $\bar{x}$ durch $n\bar{x}$ ersetzt. Führt man das in (48) und (49) durch, so erh man an Stelle von (48″) und (49″) die Beziehungen

$$(51) \qquad b_n^{(\iota)} = \frac{a_1^{(\iota)} + a_2^{(\iota)} + \ldots + a_n^{(\iota)}}{n}, \qquad r_n^{(\iota,\lambda)} = \frac{s_1^{(\iota,\lambda)} + s_2^{(\iota,\lambda)} + \ldots + s_n^{(\iota,\lambda)}}{n^2}$$

für die Komponenten des Mittelwertes und der Streuung der neuen V teilung. Aus der zweiten Gleichung (51) folgt aber mit Rücksicht auf (5

2) $$|r_n^{(\iota,\lambda)}| < \frac{S^{(\iota,\lambda)}}{n}, \qquad \lim_{n=\infty} r_n^{(\iota,\lambda)} = 0,$$

h. *jede Streuungskomponente von W_n geht mit wachsendem n gegen null.*
aß dies mit der Aussage von Satz 29 gleichbedeutend ist, sieht man
icht ein: Durch Gleichung (50′) wird eine Kugel vom Radius ϱ um den
hwerpunkt der Verteilung W_n als Mittelpunkt abgegrenzt. Von der
erteilung W_n entfalle W_n' auf das Innere, $W_n'' = 1 - W_n'$ auf den Außen-
um und die Oberfläche der Kugel. Dann liefert W_n'' zur Summe der
reuungskomponenten $r_n^{(1,1)} + r_n^{(2,2)} + \ldots + r_n^{(k,k)}$ mindestens den Beitrag
W_n'', weil für alle Punkte, die nicht zum Innern der Kugel gehören,
$(x^{(1)} - b^{(1)})^2 + (x^{(2)} - b^{(2)})^2 + \ldots + (x^{(k)} - b^{(k)})^2 \geqq \varrho^2$ sein muß. Wählt
an daher

3) $$n_0 > \frac{S^{(1,1)} + S^{(2,2)} + \ldots + S^{(k,k)}}{\varrho^2 \varepsilon},$$

hat man für $n > n_0$:

3′) $$\varrho^2 W_n'' \leqq \frac{S^{(1,1)} + \ldots + S^{(k,k)}}{n} < \varrho^2 \varepsilon, \quad W_n' = 1 - W_n'' > 1 - \varepsilon,$$

z. b. w.

Die Poissonsche Aussage ist in Satz 29 enthalten und geht aus
esem hervor, wenn wir $k = 1$ setzen und die Merkmalmengen aller
erteilungen $V_\varkappa$ auf die beiden Punkte 0 und 1 reduzieren, denen nicht ver-
hwindende, aber sonst beliebige Wahrscheinlichkeiten $p_\varkappa, q_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, 3, \ldots)$
tsprechen. Mittelwert b_n und Streuung r_n^2 des n-ten Durchschnittes
id dann durch

$$b_n = \frac{1}{n}(q_1 + q_2 + \ldots + q_n), \qquad r_n^2 = \frac{2}{n}(p_1 q_1 + p_2 q_2 + \ldots + p_n q_n)$$

geben. Das Bernoullische Theorem beschränkt sich auf den Fall
urchwegs gleicher p, q. Unsere Verallgemeinerung besagt, wenn wir nur
n Fall $k = 1$ und durchwegs arithmetische Verteilungen ins Auge fassen,
ß die Urnen beliebig verschiedenartige Lose enthalten dürfen, in Ver-
ilungen, die lediglich der Bedingung $s_\varkappa < S$ unterworfen sind. — Auf
eitere aus Satz 29 hinsichtlich geometrischer Verteilungen zu ziehende
olgerungen, die für die Fehlertheorie usw. von Bedeutung sind, gehen
r hier nicht ein.

Dagegen soll, wie schon erwähnt, dem Satz 29 als *„zweites Gesetz
r großen Zahl"* eine analoge Aussage betreffend die lineare Kreuzung
n unendlich viel Verteilungen zur Seite gestellt werden. Knüpfen wir
die am Schluß von § 5 gegebene Formulierung an, so lautet der neue Satz
wa so: Man hat innerhalb jeder einzelnen von n Erscheinungsreihen eine
stimmte Beobachtung gemacht, durch die einem bestimmten Wert $\bar{a}$ der

„Ursache“ $\bar{x}$ die größte Wahrscheinlichkeit erteilt wird; dann geht d Wahrscheinlichkeit dafür, daß $\bar{x}$ in beliebig enger Umgebung von $\bar{a}$ lieg mit wachsendem n gegen 1 Um die Analogie des „zweiten Gesetzes d großen Zahl“ mit dem ersten auch äußerlich hervortreten zu lassen, stelle wir den folgenden analytischen Satz voran, der jetzt die analoge Rol spielt wie oben Satz 28:

Bei der Multiplikation von zwei oder mehr Funktionen $f_\varkappa(\bar{x})$, d alle im Punkte $\bar{x} = 0$ einen regulären Scheitel in der Höhe 1 *besitze addieren sich die ersten und zweiten Ableitungen in $\bar{x} = 0$.*

Dabei heißt „regulärer Scheitel“ eine Stelle, in der sich die Funkti regulär verhält, die ersten Ableitungen nach jeder Koordinate verschwinde die zweiten eine negativ definite quadratische Form bilden. Man bewei den Satz leicht durch direkte Differentiation des Produktes oder inde man sich überlegt, daß $f_\varkappa$ mit $\log \text{nat}\, f_\varkappa$ an der Scheitelstelle in den erste beiden Ableitungen übereinstimmt; beim log gilt aber das Additionsgese für die Ableitungen jeder Ordnung, da man die Taylorschen Entwic lungen einfach addieren darf. — Als „eigentlicher Scheitelpunkt“ ein positiven Funktion soll eine Stelle bezeichnet werden, deren Funktionswe ein absolutes Maximum darstellt, das an keiner andern Stelle erreicht od auch nur als Grenzwert approximiert wird.

Unter Verwendung dieser und der am Schluß von § 5 eingeführt Bezeichnungen können wir nunmehr das *zweite Gesetz der großen Za* wie folgt formulieren:

Satz 30. *Wenn die Verteilung $V(\bar{x})$ eines Kollektivs C an d Stelle $\bar{x} = \bar{a}$ endliche Ableitung (Wahrscheinlichkeitsdichte) $v(\bar{a})$ aufwe und in der unendlichen Folge der von C abhängigen Kollektivs C_1, C_2, C_3 mit den Verteilungen $V_1(\bar{x}_1; \bar{x})$, $V_2(\bar{x}_2; \bar{x})$ ... durch bestimmte Beobac tungen (Festlegung der $\bar{x}_\varkappa$-Werte auf bestimmte Punktmengen $A_\varkappa$) „E wertungen“ $f_\varkappa(\bar{x})$ von $\bar{x}$ entstehen, für die*

$$f(\bar{x}) \leqq \frac{f_\varkappa(\bar{x})}{f_\varkappa(\bar{a})} \leqq F(\bar{x}), \tag{54}$$

wo $F(\bar{x})$ für $\bar{x} = \bar{a}$ einen eigentlichen und $f(\bar{x})$ einen regulären Schei in der Höhe 1 *besitzt, so führt der Rückschluß aus den ersten n Bec achtungen auf die Wahrscheinlichkeit von $\bar{x}$ zu einer Verteilung $W_n(\bar{x}$ die sich mit wachsendem n mehr und mehr um $\bar{x} = \bar{a}$ konzentriert: gibt zu beliebig klein vorgegebenen ε und ϱ ein n_0, so daß für $n >$ die „a posteriori“-Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Wert der „Ursach $\bar{x}$ in den Bereich*

$$|\bar{x} - \bar{a}| < \varrho \tag{54'}$$

fällt, größer als $1 - \varepsilon$ wird.

Der Beweis ist sofort erbracht, wenn wir von Satz 27 ausgehen und n eben angeführten Hilfssatz über die Addition der zweiten Ableitungen i der Multiplikation von Funktionen mit gemeinsamem Scheitel zu Hilfe hmen. Die Gleichung (44) des Satzes 27 läßt sich mit $h_\varkappa = 1$, $\bar{c}_\varkappa = 0$ ch so schreiben:

5) $$W_{n_A} = \text{const.} \cdot \int_{(A)} \prod_{\varkappa=1}^{n} \frac{f_\varkappa(\bar{x})}{f_\varkappa(\bar{a})} \frac{dV(\bar{x})}{v(\bar{a})}.$$

enn die verschiedenen Konstanten im Nenner können mit Rücksicht auf e noch unbestimmt gelassene Konstante vor dem Integralzeichen un- denklich hinzugefügt werden. Daß ferner über eine beliebige Punkt- enge A des $\bar{x}$-Raumes integriert wird, hat nur zur Folge, daß wir eben den m A entsprechenden Wert von W_n erhalten: Die Behauptung des Satzes 30 ht dahin, daß (55) für jedes A, das den Punkt $\bar{x} = \bar{a}$ nicht enthält, im mes für $n = \infty$ verschwindet.

Zunächst ist zu sehen, daß die Konstante vor dem Integralzeichen, e aus der Bedingung zu bestimmen ist, daß W_n für jedes feste Gebiet A chstens gleich 1 sein kann, nicht stärker als mit $\sqrt{n}^k$ ins Unendliche ächst. Denn für ein hinreichend kleines, den Punkt $\bar{x} = \bar{a}$ einschließendes ebiet A kann man $dV(\bar{x}) : v(\bar{a})$ durch das k-dimensionale Volumelement $x^{(1)}, dx^{(2)}, \ldots, dx^{(k)}$ ersetzen, so daß zufolge (54) das Integral (55) minde- ens den Wert

5′) $$\int_{(A)} f^n(\bar{x})\, dx^{(1)}\, dx^{(2)} \ldots dx^{(k)}$$

nehmen muß. Unterwirft man hier den Integrationsraum der Ähnlich- itstransformation $\bar{\xi} = \sqrt{n}\bar{x}$, so geht (55′) über in

5″) $$\frac{1}{\sqrt{n}^k} \int_{(A')} f^n\left(\frac{\bar{\xi}}{\sqrt{n}}\right) d\xi^{(1)}\, d\xi^{(2)} \ldots d\xi^{(k)},$$

ährend die (in bezug auf die neuen Variablen genommenen) ersten Ab- tungen des Integranden sich mit $1 : \sqrt{n}$, die zweiten mit $1 : n$, die itten mit $1 : \sqrt{n}^3$ usf. multiplizieren. An der Stelle $\bar{x} = \bar{a}$ hat somit r Integrand für jedes n den Wert 1, die ersten Ableitungen null und nach m Hilfssatz konstante zweite (sowie gegen null gehende höhere logarithmi- he) Ableitungen. Das Integral einer solchen Funktion über ein den Punkt $= \bar{a}$ einschließendes Integrationsgebiet kann nicht null werden, womit gezeigt , daß konst. in (55) nicht stärker als mit $\sqrt{n}^k$ ins Unendliche gehen kann.

Nehmen wir jetzt für A eine beliebige Punktmenge, die den Punkt $= \bar{a}$ nicht enthält, so hat nach (54′) W_{n_A} die obere Schranke

6) $$W_{n_A} \leqq \text{Const.} \cdot \int_{(A)} F^n(\bar{x}) \frac{dV(x)}{v(\bar{a})} < \text{Const.} \frac{F_{\max}^n}{v(\bar{a})}.$$

Da F in $\bar{x} = \bar{a}$ einen „eigentlichen Scheitelpunkt" von der Höhe 1 besitzt, ist $F_{\max}$ in A gleich einem Betrag $\eta < 1$, so daß der Ausdruck

$$\sqrt{n}^k \frac{\eta^n}{v(\bar{a})} \tag{56'}$$

mit wachsendem n gegen null geht. Damit ist aber Satz 30 in vollem Umfang bewiesen, denn da W_n für den Gesamtraum den Wert 1, für jedes den Punkt $\bar{x} = \bar{a}$ ausschließende Gebiet, wie eben gezeigt, den Grenzwert 0 besitzt, muß es für einen durch beliebig kleines ϱ bestimmten Bereich (54') gegen 1 gehen.

Ein spezielles Resultat, das in Satz 30 enthalten ist, betrifft den Gegenstand des Laplace-Bayesschen Theorems: Aus einer Urne, die im unbekannten Mischungsverhältnis $x : (1 - x)$ schwarze und weiße Kugeln enthält, werden in m Zügen ma schwarze Kugeln gezogen; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß x bei a liegt? Wenn wir die m Ziehungen in n Gruppen teilen, innerhalb deren jedesmal das Ziehungsverhältnis $a : (1 - a)$ besteht, während der Umfang der Gruppen $m_1, m_2, \ldots, m_n$ beträgt mag, so haben wir, wenn alle x-Werte zwischen 0 und 1 a priori gleich wahrscheinlich gelten für $0 < x < 1$:

$$f_\varkappa(x) = \text{Const.} \cdot [x^a (1 - x)^{1-a}]^{m_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n \tag{57}$$

und unser Satz besagt, daß die gesuchte Wahrscheinlichkeit gegen 1 geht, wenn n mit m ins Unendliche wächst und die Umgebung von $x = a$ festgehalten wird — und zwar auch bei einer beliebigen Annahme über die „a priori-Wahrscheinlichkeit" für x. Man kann auch die willkürliche Gruppenteilung umgehen, wenn man die Bedingung (54) des Satzes 30 dahin erweitert, daß nur

$$f^m(\bar{x}) \leqq \prod_{\varkappa=1}^{n} \frac{f_\varkappa(\bar{x})}{f_\varkappa(\bar{a})} \leqq F^m(\bar{x}) \tag{58}$$

sein muß, wobei m mit n ins Unendliche geht, F und f die frühere Bedeutung haben.

Einer Ergänzung bedarf Satz 30 nur für den — streng genommen unmöglichen — Fall, daß alle $\bar{x}$-Werte von $-\infty$ bis ∞ a priori gleich wahrscheinlich sein sollen. Es gibt dann kein $V(\bar{x})$ und man hat in (54) anstelle von $dV(\bar{x}) : v(\bar{a})$ das Volumelement $dx^{(1)} \cdot dx^{(2)} \ldots dx^{(k)}$ zu setzen. Damit Satz 30 bestehen bleibt, muß jetzt noch verlangt werden, daß $F(\ldots)$ und damit jedes $f_\varkappa(\bar{x})$ im Unendlichen hinreichend verschwindet.

In drei Richtungen geht unser zweites Gesetz der großen Zahl über den Inhalt des Laplace-Bayesschen Theorems (soweit dieses eine Aussage über die Konzentration der Verteilung darstellt) hinaus. Es kann erstens für die „Ursache $\bar{x}$" eine *beliebige* „a priori-Wahrscheinlichkeit

tehen; zweitens können die Urnen außer schwarzen und weißen *beliebig l verschiedenen* Kugelsorten in Mischungsverhältnissen $x_1 : x_2 : \ldots : x_k$ halten; endlich können die „Einzelbeobachtungen" aus Gruppen von hungen in *beliebigem Umfang* bestehen, wofern nur jede Gruppe das- be Wertsystem der $x_1, x_2, \ldots, x_k$ als das wahrscheinlichste bewertet. dere Erweiterungen ergeben sich, wenn man die Merkmale der Einzel- suche statt auf genaue Werte nur auf je einen Wertbereich $A_\varkappa$ fest- egt denkt, dann indem man geometrische Verteilungen in Betracht ht usf. — Wie dem ersten Gesetz der großen Zahl entspricht auch dem eiten ein „Fundamentalsatz", d. h. eine Aussage über den asymptotischen rlauf von W_n, die für den eben besprochenen speziellen Fall im sog. place-Bayesschen Theorem mit enthalten ist[28]).

Schließlich ist zu bemerken, daß auch das zweite Gesetz der großen hl, gleich dem ersten, inhaltlich mit dem allgemeinen Erfahrungssatz, in unserer Forderung I Ausdruck fand, *nahe verwandt*, aber natürlich *cht identisch* ist. Die drei ähnlichen, aber doch deutlich unterscheid- ren Aussagen lassen sich wie folgt charakterisieren. Wenn wir aus einer ne mit schwarzen und weißen Kugeln in n Zügen s schwarze gezogen ben und die relative Häufigkeit $s : n$ feststellen, so besagt

1) unsere Forderung I bzw. die Definition der Wahrscheinlichkeit, ß bei unbegrenzter Vergrößerung von n der Quotient $s : n$ gegen einen ten Wert geht, der eben die Wahrscheinlichkeit eines schwarzen Zuges ßt (und nach üblicher Annahme dem Mischungs-Verhältnis in der Urne spricht);

2) das erste Gesetz der großen Zahl, daß, wenn wir die Versuchs- ie mit derselben Urne unendlich oft wiederholen, bei großem n nahezu lesmal (bei $n = \infty$ „fast immer") der gleiche oder ein fast gleicher rt von $s : n$ herauskommt (und zwar der dem Mischungs-Verhältnis sprechende);

3) das zweite Gesetz der großen Zahl, daß, wenn wir unendlich le gleiches $s : n$ ergebende Versuchsserien mit beliebigen Urnen betrachten, großem n nahezu jedesmal (bei $n = \infty$ „fast immer") der Grenzwert n $s : n$ für die betreffende Urne (also nach der üblichen Annahme auch s Mischungs-Verhältnis in ihr) gleich oder fast gleich dem beobachteten ist.

[28]) Fundamentalsätze, S. 98 ff.

(Eingegangen am 15. März 1919.)

Über die Primfunktionen in einer arithmetischen Progression.

Von

Heinrich Kornblum (†), stud. math. in Göttingen.

[Aus dem Nachlaß herausgegeben von E. Landau[1]).]

§ 1.

Satz: *p sei eine Primzahl. Es seien $A(x)$ und $M(x)$ ganze ganz-zahlige Funktionen, von denen keine $\equiv 0 \pmod p$ ist, und die im Sinne von Dedekind*[2]) *$\bmod p$ teilerfremd sind. Dann gibt es unendlich viele $\bmod p$ inkongruente Primfunktionen $P(x)$, welche die Kongruenz*

$$P \equiv A \,(\mathrm{modd}\, p, M)$$

erfüllen; auch dann noch, wenn vorgeschrieben wird, daß der Koeffizient

---

[1]) Verfasser, geboren in Wohlau am 23. August 1890, hatte vor dem Krieg selbständig die Entdeckung gemacht, daß Dirichlets klassischer Beweis des Satzes von den Primzahlen einer arithmetischen Progression (nebst den späteren elementaren Begründungen des Nichtverschwindens der bekannten Reihen) ein Analogon z. B. in der Theorie der Primfunktionen in Restklassen nach einem Doppelmodul p, M hat. Über dies selbstgewählte Thema hatte er seine Doktordissertation im wesentlichen schon fertiggestellt. Als Kriegsfreiwilliger fiel er im Oktober 1914 bei Poël-Capelle. Erst kürzlich erhielt ich aus seinem Nachlaß das (mir schon seit 1914 bekannte) Manuskript. Ich übergebe hiermit die schönsten und interessantesten Teile der Öffentlichkeit. Der Kornblumsche Ansatz zeichnet sich durch hohe Eleganz aus und zeigt, daß die Wissenschaft in ihm einen hoffnungsvollen Forscher verloren hat. Den Satz und Beweis des § 1 habe ich aus Kornblums Manuskript übernommen; einige Bemerkungen habe ich in Fußnoten angefügt. Den Satz und Beweis des § 2 hat er allerdings nur für $k = 2$ gehabt; doch wäre die von mir hinzugefügte Ausdehnung auf beliebiges k wohl ohnehin bei gemeinsamer Besprechung in seine Dissertation hinzugekommen, da alles unmittelbar mit seiner Methode herauskommt.

[2]) *Abriſs einer Theorie der höhern Congruenzen in Bezug auf einen reellen Primzahl-Modulus.* Journal für die reine und angewandte Mathematik, **54** (1857), S. 1–26.

r höchsten Potenz in $P(x)$ einen vorgeschriebenen, zu p teilerfremden est r mod p läßt.

Beweis: Es genügt, den Nachweis für *primäre* P zu führen, d. h. lche, deren höchster Koeffizient $\equiv 1 \pmod p$ ist. Denn dieser Wortlaut aucht ja bei gegebenem r nur auf $r_1 A(x)$ statt $A(x)$ angewendet zu erden, wo $r r_1 \equiv 1 \pmod p$ ist; aus $P_1 \equiv r_1 A$ folgt ja $r P_1 \equiv A$.

Auch der Modul M darf primär angenommen werden, da ja bei ihm ne beliebige zu p teilerfremde Zahl als Faktor willkürlich ist.

Ist $F(x)$ eine ganze ganzzahlige Funktion $\not\equiv 0 \pmod p$, so bezeichne '] ihren Grad $(\mathrm{mod}\, p)$, d. h. den Exponenten der höchsten Potenz, ren Koeffizient $\not\equiv 0 \pmod p$ ist. Alsdann darf $[M] = m > 0$ an- nommen werden, da sonst die Behauptung trivial ist.

Die zu M teilerfremden Restklassen $(\mathrm{modd}\, p, M)$, deren Anzahl h ißt[3]), bilden nach Dedekind eine Abelsche Gruppe. Es sei χ ein liebiger der h Charaktere dieser Gruppe. Es werde $\chi(F)$ für zu M mod p ilerfremdes F als Charakter der Restklasse erklärt; für die übrigen F rde $\chi(F) = 0$ gesetzt.

Für jeden dieser h „Charaktere $\chi(F) (\mathrm{modd}\, p, M)$" werde, wenn > 1 ist,

$$L(s, \chi) = \sum_F \frac{\chi(F)}{p^{[F]\, s}}$$

setzt, wo F in irgendeiner Reihenfolge ein vollständiges System mod p kongruenter primärer Funktionen durchläuft[4]) (deren es nach Dedekind zu jedem Grad $n \geqq 0$ gibt). Die Reihe ist absolut konvergent. da für $\geqq 0$, $s > 1$

$$\sum_{[F]=n} \frac{|\chi(F)|}{p^{[F]\, s}} = \frac{1}{p^{n s}} \sum_{[F]=n} |\chi(F)| \leqq \frac{1}{p^{n s}} p^n = \frac{1}{p^{n(s-1)}}$$

, so daß $L(s, \chi)$ die konvergente Majorante

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^{n(s-1)}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p^{s-1}}}$$

sitzt.

$L(s, \chi)$ ist offenbar, wenn die Glieder mit gleichem $[F]$ zusammen- faßt werden und

$$\sum_{[F]=n} \chi(F) = a_n$$

---

[3]) Dedekinds Wertbestimmung von $h = \varphi(M)$ ist hier unerheblich.

[4]) Dies sei stets die Bedeutung des Summationsbuchstabens in derartigen mmen.

gesetzt ist, eine Dirichletsche Reihe[5])

$$L(s,\chi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{p^{ns}}.$$

Für jeden vom Hauptcharakter χ_0 verschiedenen Charakter χ lä sich nun zeigen, daß diese Dirichletsche Reihe abbricht, indem

$$a_n=0 \quad \text{für } n\geqq m \tag{1}$$

ist. Da nämlich die Gesamtheit der mod p inkongruenten Funktionen mit $[R]<m$, wenn die Funktion $R\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)$ hinzugefügt wird, na Dedekind alle p^m Restklassen (modd p, M) und jede genau einmal r präsentiert, also

$$\sum_R \chi(R)=0$$

ist, so genügt es festzustellen: Die Anzahl der mod p inkongruent primären F, welche den Bedingungen

$$F\equiv R\,(\mathrm{modd}\,p, M), \qquad [F]=n$$

genügen, ist bei jedem festen $n\geqq m$ von R unabhängig. In der Tat ist

$$F\equiv QM+R\,(\mathrm{mod}\,p)$$

notwendig und hinreichend, daß $[Q]=n-m$ und Q primär ist, und d so gefundene Anzahl p^{n-m} ist wirklich von R frei.

Weil somit $L(s,\chi)$ für $\chi\neq\chi_0$ eine endliche Summe

$$L(s,\chi)=\sum_{n=0}^{m-1}\frac{a_n}{p^{ns}}$$

ist (also bei beliebigem s durch diese Summe erklärt werden kann), sind b zu 1 abnehmendem s die drei Grenzwerte

$$\lim_{s=1} L(s,\chi)=L(1,\chi), \tag{2}$$

$$\lim_{s=1} L'(s,\chi)=L'(1,\chi), \tag{3}$$

$$\lim_{s=1}\frac{L(s,\chi)-L(1,\chi)}{s-1}=L'(1,\chi) \tag{4}$$

vorhanden[6]).

---

[5]) Natürlich geht $L(s,\chi)$, wenn $p^{-s}=y$ gesetzt wird, in eine gewöhnlich mindestens für $|y|<\frac{1}{p}$ konvergente Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}a_n y^n$ über.

[6]) Damit soll stets gesagt sein, daß der betreffende Ausdruck gegen ein *endlichen* Wert strebt.

Für $s > 1$ und jedes χ ist ferner

$$L(s, \chi) = \prod_P \frac{1}{1 - \frac{\chi(P)}{p^{[P]s}}},$$

o P in beliebiger Reihenfolge ein vollständiges System $\bmod p$ inkonruenter primärer Primfunktionen durchläuft[7]). Denn erstens genügt die unktion

$$g(B) = \frac{\chi(B)}{p^{[B]s}}$$

egen

$$\chi(B_1 B_2) = \chi(B_1)\,\chi(B_2), \qquad [B_1 B_2] = [B_1] + [B_2]$$

em Multiplikationsgesetz

$$g(B_1 B_2) = g(B_1)\,g(B_2);$$

weitens sind nach Dedekind die primären $F \not\equiv 1$ eindeutig in Potenzrodukte inkongruenter primärer $P \bmod p$ zerlegbar; drittens konvergiert as Produkt unbedingt, da

$$\sum_P \left| \frac{\chi(P)}{p^{[P]s}} \right| \leqq \sum_F \frac{|\chi(F)|}{p^{[F]s}}$$

onvergiert.

Aus (5) folgt, wenn $\prod_P'$ bedeutet, daß P nicht in $M \,(\bmod p)$ aufgeht,

$$L(s, \chi_0) = \prod_P' \frac{1}{1 - \frac{1}{p^{[P]s}}} = \prod_{P|M} \left(1 - \frac{1}{p^{[P]s}}\right) \prod_P \frac{1}{1 - \frac{1}{p^{[P]s}}},$$

so, wegen

$$\prod_P \frac{1}{1 - \frac{1}{p^{[P]s}}} = \sum_F \frac{1}{p^{[F]s}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{p^{ns}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p^{s-1}}},$$

$$L(s, \chi_0) = \prod_{P|M} \left(1 - \frac{1}{p^{[P]s}}\right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p^{s-1}}};$$

ei zu 1 abnehmendem s ist also

$$\lim_{s=1} (s-1)\, L(s, \chi_0)$$

rhanden, aber

$$-\frac{L'}{L}(s, \chi_0) \to \infty.$$

Aus (5) folgt ferner bei jedem χ für $s > 1$

$$L(s, \chi) = e^{\sum_{P,n} \frac{\chi(P^n)}{n p^{[P]ns}}},$$

[7]) Dies sei stets die Bedeutung des Multiplikations- oder Summationsbuchabens P.

wo in beliebiger Reihenfolge n die positiven ganzen Zahlen und P di
mod p inkongruenten primären Primfunktionen durchläuft[8]), also

$$-\frac{L'}{L}(s,\chi)=\log p\sum_{P,n}\frac{\chi(P^n)[P]}{p^{[P]ns}}. \tag{10}$$

Zur gegebenen Restklasse A (mod$d$ p, M) werde nun die inverse
bestimmt:

$$AB\equiv 1\ (\mathrm{mod}d\ p,M).$$

Dann ist, wenn (10) bei allen χ verwendet wird, für $s>1$

$$-\sum_{\chi}\chi(B)\frac{L'}{L}(s,\chi)=\log p\sum_{\chi}\chi(B)\sum_{P,n}\frac{\chi(P^n)[P]}{p^{[P]ns}}$$

$$=\log p\sum_{P,n}\frac{[P]}{p^{[P]ns}}\sum_{\chi}\chi(BP^n),$$

also nach den Fundamentaleigenschaften der Charaktere

$$=h\log p\sum_{P^n\equiv A}\frac{[P]}{p^{[P]ns}}. \tag{11}$$

Wenn es also gelingt, für jedes $\chi\neq\chi_0$

$$L(1,\chi)\neq 0 \tag{12}$$

zu zeigen, so folgt aus (11) nach (2), (3) und (8)

$$\sum_{P^n\equiv A}\frac{[P]}{p^{[P]ns}}\to\infty. \tag{13}$$

Andererseits ist für $s>1$

$$\sum_{\substack{P^n\equiv A\\ n>1}}\frac{[P]}{p^{[P]ns}}<\sum_{P}[P]\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{p^{[P]n}}=\sum_{P}\frac{[P]}{p^{[P]}(p^{[P]}-1)}<\sum_{n=1}^{\infty}p^n\frac{n}{p^n(p^n-1)},$$

also beschränkt. Aus (13) folgt daher

$$\sum_{P\equiv A}\frac{[P]}{p^{[P]s}}\to\infty, \tag{14}$$

also die Existenz unendlich vieler mod p inkongruenter primärer $P\equiv A$
q. e. d.

Beweis von (12) für komplexe Charaktere: Aus (9) folgt durc
Multiplikation über alle χ

$$\prod_{\chi}L(s,\chi)=e^{h\sum\limits_{P^n\equiv 1}\frac{1}{np^{[P]ns}}}\geqq 1. \tag{15}$$

[8]) Diese Bedeutung habe $\sum_{P,n}$ stets in der Folge.

äre nun für einen komplexen Charakter $L(1, \chi_1) = 0$, so wäre auch den konjugierten $L(1, \bar{\chi}_1) = 0$, also nach (4)

$$\frac{L(s, \chi_1)}{s-1} \to L'(1, \chi_1), \qquad \frac{L(s, \bar{\chi}_1)}{s-1} \to L'(1, \bar{\chi}_1),$$

glich wegen (2) und der Existenz des Grenzwertes (7)

$$L(s, \chi) = (s-1)\cdot(s-1)\, L(s, \chi_0) \cdot \frac{L(s, \chi_1)}{s-1} \cdot \frac{L(s, \bar{\chi}_1)}{s-1} \cdot \prod_{\chi \neq \chi_0, \chi_1, \bar{\chi}_1} L(s, \chi) \to 0,$$

tgegen (15).

Beweis von (12) für reelle Charaktere: χ sei reell und $\neq \chi_0$. werde für primäres N

$$f(N) = \sum_{D \mid N} \chi(D)$$

etzt, wo D ein System mod p inkongruenter primärer Teiler von N rchläuft. Dann ist erstens $f(1) = 1$; zweitens für mod p teilerfremde und N_2

$$f(N_1 N_2) = \sum_{D \mid N_1 N_2} \chi(D) = \sum_{\substack{D_1 \mid N_1 \\ D_2 \mid N_2}} \chi(D_1 D_2) = \sum_{D_1 \mid N_1} \chi(D_1) \cdot \sum_{D_2 \mid N_2} \chi(D_2) = f(N_1) f(N_2),$$

o für $N \not\equiv 1$, wenn $N \equiv \prod_{P \mid N} P^l$ die Zerlegung in Potenzen inkongruenter märer P ist,

$$f(N) = \prod_{P \mid N} f(P^l);$$

ttens, je nachdem $\chi(P) = 0$, 1 oder -1 ist,

$$f(P^l) = 1 + \chi(P) + \ldots + \chi(P^l) = \begin{cases} 1 + 0 + \ldots + 0 & = 1, \\ 1 + 1 + \ldots + 1 & = l + 1, \\ 1 - 1 + \ldots + (-1)^l & = \frac{1 + (-1)^l}{2}, \end{cases}$$

o stets $f(P^l) \geqq 0$ und für gerades l sogar $f(P^l) \geqq 1$. Daher ist stets $f(N) \geqq 0$ und für $N \equiv Q^2$ sogar $f(N) \geqq 1$.

Es werde nun für ganzes $z > 0$

$$G(z) = \sum_{[N] \leqq z} \frac{f(N)}{p^{\frac{[N]}{2}}}$$

etzt. Dann ist einerseits

$$G(z) \geqq \sum_{[Q] \leqq \frac{z}{2}} \frac{f(Q^2)}{p^{[Q]}} \geqq \sum_{[Q] \leqq \frac{z}{2}} \frac{1}{p^{[Q]}} = \sum_{0 \leqq n \leqq \frac{z}{2}} \frac{p^n}{p^n} = \sum_{0 \leqq n \leqq \frac{z}{2}} 1 > \frac{z}{2},$$

also

$$G(z) \to \infty \tag{16}$$

bei unbegrenzt wachsendem z.

Andererseits ist

$$G(z) = \sum_{[N] \leqq z} \frac{\sum_{D|N} \chi(D)}{p^{\frac{[N]}{2}}} = \sum_{[D]+[E] \leqq z} \frac{\chi(D)}{p^{\frac{[D]}{2}+\frac{[E]}{2}}}$$

$$= \sum_{[D] \leqq \frac{z}{2}} \frac{\chi(D)}{p^{\frac{[D]}{2}}} \sum_{[E] \leqq z-[D]} \frac{1}{p^{\frac{[E]}{2}}} + \sum_{[E] \leqq \frac{z}{2}} \frac{1}{p^{\frac{[E]}{2}}} \sum_{[D] \leqq z-[E]} \frac{\chi(D)}{p^{\frac{[D]}{2}}} - \sum_{[E] \leqq \frac{z}{2}} \frac{1}{p^{\frac{[E]}{2}}} \cdot \sum_{[D] \leqq \frac{z}{2}} \frac{\chi(}{p}$$

$$= \sum_{[D] \leqq \frac{z}{2}} \frac{\chi(D)}{p^{\frac{[D]}{2}}} \sum_{[E] \leqq z-[D]} \frac{1}{p^{\frac{[E]}{2}}} + \sum_{[E] < \frac{z}{2}} \frac{1}{p^{\frac{[E]}{2}}} \sum_{\frac{z}{2} < [D] \leqq z-[E]} \frac{\chi(D)}{p^{\frac{[D]}{2}}}.$$

Für $z \geqq 2m$ verschwindet nach (1) die zweite Doppelsumme, und, sow[eit] $[D] \geqq m$ ist, der betreffende Bestandteil der ersten Doppelsumme; dah[er] ist für $z \geqq 2m$

$$G(z) = \sum_{[D] < m} \frac{\chi(D)}{p^{\frac{[D]}{2}}} \sum_{[E] \leqq z-[D]} \frac{1}{p^{\frac{[E]}{2}}} \text{ [9]}$$

$$= \sum_{n=0}^{m-1} \frac{a_n}{p^{\frac{n}{2}}} \sum_{q=0}^{z-n} \frac{p^q}{p^{\frac{q}{2}}} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{a_n}{p^{\frac{n}{2}}} \sum_{q=0}^{z-n} p^{\frac{q}{2}} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{a_n}{p^{\frac{n}{2}}} \frac{p^{\frac{z-n+1}{2}} - 1}{p^{\frac{1}{2}} - 1} = \frac{p^{\frac{z+1}{2}}}{p^{\frac{1}{2}} - 1} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{a_n}{p^n} +$$

$$= p^{\frac{z}{2}} \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}-1} L(1, \chi) + c. \tag{17}$$

Wäre nun $L(1, \chi) = 0$, so wäre nach (17) für $z \geqq 2m$

$$G(z) = c,$$

gegen (16) [10].

[9]) Anmerkung des Herausgebers: Diese Identität ist (sogar für $z \geqq m$) au[ch] ohne die vorangegangene Transformation von $G(z)$ sofort daraus abzulesen, daß

$$G(z) = \sum_{[D] \leqq z} \frac{\chi(D)}{p^{\frac{[D]}{2}}} \sum_{[E] \leqq z-[D]} \frac{1}{p^{\frac{[E]}{2}}}$$

ist und (1) gilt.

[10]) Anmerkung des Herausgebers: Verf. hat sich bei der Wahl seines $G(z)$ et[was] zu genau an das bekannte Paradigma angeschlossen; einfacher ist es hier, statt G die Funktion

$$H(z) = \sum_{[N] \leqq z} f(N)$$

§ 2.

Satz: *Unter den Voraussetzungen des Satzes aus* § 1 *gibt es sogar endlich viele* mod p *inkongruente Primfunktionen* $P \equiv A \,(\mathrm{mod}\, d\, p, M)$ *mit* mod p *vorgeschriebenem, zu* p *teilerfremdem höchstem Koeffizienten* d $[P] \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)$, *wo* $k > 1$ *und* l *vorgeschriebene ganze Zahlen sind.*

Beweis: Es darf wieder P primär vorgeschrieben und M primär genommen werden; auch $m > 0$ vorausgesetzt werden, da es nach Dedekind zu jedem Grad > 0 mindestens eine Primfunktion gibt[11]).

Offenbar genügt es, für jede von 1 verschiedene k-te Einheitswurzel die Existenz von

$$\lim_{s=1} \sum_{P \equiv A} \frac{\eta^{[P]}\,[P]}{p^{[P]s}} \tag{8}$$

nachzuweisen. Denn hieraus folgt nach (14), wenn $\sum_{\eta}$ über alle k-ten Einheitswurzeln (einschl. 1) erstreckt wird,

---

betrachten. Einerseits ist

$$H(z) \geqq \sum_{[Q] \leqq \frac{z}{2}} f(Q^s) \geqq \sum_{0 \leqq n \leqq \frac{z}{2}} p^n \to \infty,$$

andererseits für $z \geqq m$

$$H(z) = \sum_{[D] \leqq z} \chi(D) \sum_{[E] \leqq z-[D]} 1 = \sum_{n=0}^{m-1} a_n \sum_{q=0}^{z-n} p^q = \sum_{n=0}^{m-1} a_n \frac{p^{z-n+1}-1}{p-1} = \frac{p^{z+1}}{p-1} L(1,\chi) + c_1,$$

also (12) bewiesen.

[11]) Anmerkung des Herausgebers: Übrigens läßt sich die von Dedekind durch Betrachtung von $x^{p^n} - x$ erhaltene Bestimmung $\frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \mu(d)\, p^{\frac{n}{d}}$ für die Anzahl $\psi(n)$ der mod p inkongruenten primären Primfunktionen n-ten Grades, d. h. die gleichbedeutende Gleichung $p^n = \sum_{d \mid n} d\, \psi(d)$ direkt aus der Identität

$$\prod_{d=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p^{ds}}} \right)^{\psi(d)} = \prod_{P} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^{[P]s}}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p^{s-1}}} \qquad (s > 1)$$

lesen; denn dieselbe besagt

$$\sum_{d=1}^{\infty} \psi(d) \log\left(1 - \frac{1}{p^{ds}}\right) = -\log\left(1 - \frac{p}{p^s}\right),$$

$$\sum_{d,g=1}^{\infty} \frac{\psi(d)}{g\, p^{dgs}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n\, p^{ns}},$$

$$p^n = n \sum_{dg=n} \frac{\psi(d)}{g} = \sum_{d \mid n} d\, \psi(d).$$

$$\sum_{\eta} \eta^{-l} \sum_{P \equiv A} \frac{\eta^{[P]}[P]}{p^{[P]s}} \to \infty, \tag{19}$$

und die linke Seite von (19) ist

$$= \sum_{P \equiv A} \frac{[P]}{p^{[P]s}} \sum_{\eta} \eta^{[P]-l} = k \sum_{\substack{P \equiv A \\ [P] \equiv l \pmod k}} \frac{[P]}{p^{[P]s}}.$$

Für jedes χ und jede k-te Einheitswurzel η werde auf der Strecke $s > 1$

$$L(s, \chi, \eta) = \sum_{F} \frac{\eta^{[F]} \chi(F)}{p^{[F]s}}$$

gesetzt. Für $\eta = 1$ ist dies das $L(s, \chi)$ des § 1. Für $\eta \neq 1$ ergibt sich parallel zu den Entwicklungen des § 1 das folgende.

Nach (1) ist für $\chi \neq \chi_0$

$$L(s, \chi, \eta) = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\eta^n a_n}{p^{ns}},$$

also bei zu 1 abnehmendem s

$$L(s, \chi, \eta) \to L(1, \chi, \eta),$$

$$L'(s, \chi, \eta) \to L'(1, \chi, \eta),$$

$$\frac{L(s, \chi, \eta) - L(1, \chi, \eta)}{s-1} \to L'(1, \chi, \eta). \tag{20}$$

Für $s > 1$ und jedes χ ist

$$L(s, \chi, \eta) = \prod_{P} \frac{1}{1 - \frac{\eta^{[P]} \chi(P)}{p^{[P]s}}}.$$

Für $s > 1$ ist

$$L(s, \chi_0, \eta) = \prod_{P \mid M} \left(1 - \frac{\eta^{[P]}}{p^{[P]s}}\right) \prod_{P} \frac{1}{1 - \frac{\eta^{[P]}}{p^{[P]s}}},$$

also, wegen

$$\prod_{P} \frac{1}{1 - \frac{\eta^{[P]}}{p^{[P]s}}} = \sum_{F} \frac{\eta^{[F]}}{p^{[F]s}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta^n p^n}{p^{ns}} = \frac{1}{1 - \frac{\eta}{p^{s-1}}},$$

$$L(s, \chi_0, \eta) = \prod_{P \mid M} \left(1 - \frac{\eta^{[P]}}{p^{[P]s}}\right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{\eta}{p^{s-1}}}, \tag{21}$$

folglich $\lim_{s=1} L(s, \chi_0, \eta)$ vorhanden und $\neq 0$; ebenso ist $\lim_{s=1} L'(s, \chi_0,$ vorhanden und somit auch $\lim_{s=1} \frac{L'}{L}(s, \chi_0, \eta)$.

Für $s > 1$ ist

2) $$L(s, \chi, \eta) = e^{\sum\limits_{P,n} \frac{\eta^{[P]n} \chi(P^n)}{n p^{[P]ns}}},$$

$$-\frac{L'}{L}(s, \chi, \eta) = \log p \sum_{P,n} \frac{\eta^{[P]n} \chi(P^n)[P]}{p^{[P]ns}},$$

$$-\sum_{\chi} \chi(B) \frac{L'}{L}(s, \chi, \eta) = h \log p \sum_{P^n \equiv A} \frac{\eta^{[P]n}[P]}{p^{[P]ns}}.$$

Wenn also für jedes $\chi \neq \chi_0$

3) $$L(1, \chi, \eta) \neq 0$$

zeigt werden kann, so existiert

$$\lim_{s=1} \sum_{P^n \equiv A} \frac{\eta^{[P]n}[P]}{p^{[P]ns}},$$

o der Grenzwert (18).

Beweis von (23) für reelles $\chi \neq \chi_0$ mit $\eta \neq -1$ und für komexes χ: Es werde

$$\eta = e^{\varphi i} \qquad (0 < \varphi < 2\pi)$$

etzt. Es werde ferner für zu $M \pmod p$ teilerfremdes F

$$\chi(F) = e^{\omega(F) i} \qquad (0 \leqq \omega < 2\pi)$$

etzt. Dann ist für diese F der Charakter

$$\chi^2(F) = e^{2\omega(F) i}.$$

$s, \chi^2, \eta^2)$ hat für zu 1 abnehmendes s nach den gefundenen Eigenaften von $L(s, \chi)$ und $L(s, \chi, \eta)$ einen Limes (da nicht zugleich $= \chi_0$ und $\eta^2 = 1$ ist). Für $s > 1$ ist nun, wenn in $\sum'$ die $P \nmid M$ fehlen,

$$|L(s, \chi, \eta)| = e^{\Re \sum\limits_{P,n} \frac{\eta^{[P]n} \chi(P^n)}{n p^{[P]ns}}} = e^{\sum\limits'_{P,n} \frac{\cos n(\omega(P) + [P]\varphi)}{n p^{[P]ns}}},$$

$$|L(s, \chi^2, \eta^2)| = e^{\sum\limits'_{P,n} \frac{\cos 2n(\omega(P) + [P]\varphi)}{n p^{[P]ns}}}$$

dererseits ist

$$e^{\sum\limits'_{P,n} \frac{1}{n p^{[P]ns}}} \leqq e^{\sum\limits_{P,n} \frac{1}{n p^{[P]ns}}} = \prod_P \frac{1}{1 - \frac{1}{p^{[P]s}}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p^{s-1}}}.$$

nun für reelle ϑ

$$3 + 4\cos\vartheta + 2\cos 2\vartheta = (1 + 2\cos\vartheta)^2 \geqq 0$$

ist, ergibt sich für $s > 1$

$$1 \leqq e^{\sum'_{P,n} \frac{3+4\cos n(\omega(P)+[P]\varphi)+2\cos 2n(\omega(P)+[P]\varphi)}{n p^{[P]ns}}} \leqq \left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^{s-1}}}\right)^3 |L(s,\chi,\eta)|^4 |L(s,\chi^2$$

also für $1 < s < 2$ bei passender Wahl eines von s freien positiven γ

$$1 < \frac{\gamma}{(s-1)^3} |L(s,\chi,\eta)|^4 |L(s,\chi^2,\eta^2)|^2,$$

$$|L(s,\chi,\eta)| > \frac{(s-1)^{\frac{3}{4}}}{\gamma^{\frac{1}{4}} \sqrt{|L(s,\chi^2,\eta^2)|}},$$

$$\left|\frac{L(s,\chi,\eta)}{s-1}\right| > \frac{1}{(s-1)^{\frac{1}{4}} \gamma^{\frac{1}{4}} \sqrt{|L(s,\chi^2,\eta^2)|}}.$$

Bei zu 1 abnehmendem s ist also

$$\left|\frac{L(s,\chi,\eta)}{s-1}\right| \to \infty,$$

was im Falle $L(1,\chi,\eta) = 0$ mit (20) in Widerspruch steht.

Beweis von (23) für reelles $\chi \neq \chi_0$ mit $\eta = -1$: Es werde

$$f(N) = \sum_{D|N} (-1)^{[D]} \chi(D)$$

gesetzt. Dann ergibt sich wie in § 1

$$f(N) \geqq 0, \qquad f(Q^2) \geqq 1.$$

Es werde nun für $z > 0$

$$H(z) = \sum_{[N] \leqq z} f(N)$$

gesetzt[12]). Dann ist einerseits

$$H(z) \geqq \sum_{[Q] \leqq \frac{z}{2}} f(Q^2) \geqq \sum_{0 \leqq n \leqq \frac{z}{2}} p^n \to \infty,$$

andererseits für $z \geqq m$

$$H(z) = \sum_{[D] \leqq z} (-1)^{[D]} \chi(D) \sum_{[E] \leqq z-[D]} 1 = \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^n a_n \sum_{q=0}^{z-n} p^q = \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^n a_n \frac{p^{z-n+1}}{p-1}$$

$$= \frac{p^{z+1}}{p-1} L(1,\chi,\eta) + c_3,$$

also (23) wahr.

---

[12]) Anmerkung des Herausgebers: Ich weiche hier vom Kornblumschen Te (der wieder $G(z)$ einführt) ab, indem ich gleich die Vereinfachung der Anm. anbringe.

Anhang des Herausgebers.

Wenn man einen Satz[13]) von mir über Dirichletsche Reihen mit effizienten $\geqq 0$ heranzieht, so läßt sich in § 1 und § 2 das Nichtschwinden aller $L(1, \chi, \eta)$ für $\chi \neq \chi_0$, $\eta = 1$ und für $\eta \neq 1$ mit einem lage folgendermaßen begründen. Aus (9) und (22) folgt durch Multiplikation über alle kh Paare η, χ für $s > 1$

$$s) = \prod_{\eta} \prod_{\chi} L(s, \chi, \eta) = \prod_{\eta} e^{\sum_{P^n \equiv 1}^{h} \frac{\eta[P]n}{np^{[P]ns}}} = e^{\sum_{P^n \equiv 1, [P]n \equiv 0 \pmod k}^{kh} \frac{1}{np^{[P]ns}}} = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{b_q}{q^s},$$

die b_q rational und $\geqq 0$ sind. Andererseits sind die b_q ganze algeische Zahlen, da dies von jedem Koeffizienten der Dirichletschen hen $L(s, \chi, \eta)$ gilt. Die b_q sind also ganze rationale Zahlen $\geqq 0$. endlich viele darunter sind > 0; denn irgendein mod p nicht in M gehendes P nebst $n = kh$ liefert $P^n \equiv 1 \pmod{p, M}$, $[P]n \equiv 0 \pmod k$, l dies Glied der Dirichletschen Reihe im Exponenten hat schon die istenz unendlich vieler positiver b_q zur Folge. Daher divergiert $\sum_{q=1}^{\infty} b_q$ re nun ein $L(1, \chi, \eta) = 0$, so würde $\Lambda(s)$ in $s = 1$ regulär sein. Nach und (21) ist aber $\Lambda(s)$ für $0 \leqq s < 1$ gewiß regulär. $\sum_{q=1}^{\infty} b_q$ müßte nach dem in Anm. 13 genannten Satz konvergieren.

Berlin, den 9. April 1919.

---

[13]) „$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{b_q}{q^s}$, wo $b_q \geqq 0$ ist, konvergiere für $s > \alpha$, und es sei die für $\sigma > \alpha$ durch Reihe dargestellte Funktion für $\beta \leqq s \leqq \alpha$ regulär. Dann konvergiert $\sum_{q=1}^{\infty} \frac{b_q}{q^\beta}$." ürlich genügt hier wegen der Substitution $p^{-s} = y$ auch der ältere Vivantische über Potenzreihen.

(Eingegangen am 10. April 1919.)

Eigenschaften der Integralflächen der partiellen Differentialgleichung $s^2 - rt = \text{konst.}$

Von

Georg Scheffers in Berlin-Dahlem.

Daß die Integralflächen der partiellen Differentialgleichung zweit Ordnung $s^2 - rt = 0$, worin r, s, t die Ableitungen zweiter Ordnu von z nach x und y bedeuten, die abwickelbaren Flächen sind, ist wo bekannt[1]). Auch die partielle Differentialgleichung von der allgemeiner Form $s^2 - rt = \text{konst.}$ ist längst integriert worden. Aber ihre Integr flächen haben einige bemerkenswerte Eigenschaften, die, soviel ich we bisher noch nicht zur Sprache gebracht worden sind. Sie in Kürze ab leiten, ist der Zweck dieser Zeilen.

1. Vollkommene Parallelogramm-Netze in der Ebene.

Wenn man sagt, daß die Integralkurven einer Differentialgleichu von der Form

$$A(x, y)dx^2 + 2B(x, y)dx\,dy + C(x, y)dy^2 = 0, \tag{1}$$

wo $D^2 = B^2 - AC$ nicht identisch verschwindet, ein Netz von unendl kleinen Parallelogrammen in der xy-Ebene bilden, ist man sich des wohl bewußt, daß doch die Richtungen der Gegenseiten jeder unendl kleinen Masche des Netzes unendlich wenig voneinander abweichen. Netz möge nun ein vollkommenes Parallelogramm-Netz heißen, wenn j Kurve der einen Schar alle Kurven der anderen Schar in Punkten tri in denen diese Kurven der zweiten Schar parallele Tangenten haben. vollkommenes Parallelogramm-Netz in der Ebene entsteht gerade so

[1]) Euler, „De solidis quorum superficiem in planum explicare licet", N Comment. Acad. Petrop. **16** (1771), Petersburg 1772, S. 3–34, Monge, „Sur les priétés de plusieurs genres de surfaces courbes, particulièrement sur celles des faces développables etc." Mém. div. des Sav. étrangers **9** (1780), S. 382–440.

ie Schiebungsfläche[2]) im Raum: Man nimmt in der Ebene zwei sich nneidende Kurven an und verschiebt jede ohne Drehung derart, daß Schnittpunkt mit der andern Kurve diese zweite Kurve durchläuft. ttels zweier Parameter u, v kann jedes vollkommene Parallelogramm-tz in der Form

$$x = U_1(u) + V_1(v), \qquad y = U_2(u) + V_2(v)$$

rgestellt werden, wo U_1, U_2 nur von u und V_1, V_2 nur von v abhängen d die Funktionaldeterminante

$$U_1' V_2' - U_2' V_1'$$

ht identisch verschwindet. Indem man von den beiden Kurven

$$\xi_1 = 2U_1(u), \quad \eta_1 = 2U_2(u) \quad \text{und} \quad \xi_2 = 2V_1(v), \quad \eta_2 = 2V_2(v)$$

geht, kann man alle Kurven des Netzes dadurch erzeugen, daß man n allen Strecken; die von irgendeinem Punkte der einen Kurve nach en Punkten der andern gehen, die Mitten bestimmt.

2. Bedingungen für ein vollkommenes Parallelogramm-Netz.

Aus (1) folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-B \mp D}{C},$$

nn D einer der beiden durch $D^2 = B^2 - AC$ definierten Funktionswerte Die Integralkurven der Differentialgleichung (1) bilden ein vollkom-nes Parallelogramm-Netz, wenn solche Punkte der Integralkurven einer beiden Gleichungen (4), denen dieselbe Tangentenrichtung zukommt, e Integralkurve der andern Gleichung (4) ausmachen, d. h. wenn

$$\frac{-B \mp D}{C} = \text{konst.}$$

Integrale von (4) sind. Da sich die letzte Gleichung auch in der Form

$$\frac{-B \pm D}{A} = \text{konst.}$$

reiben läßt, ist also zu fordern, daß die hieraus durch Differentiation vorgehende Gleichung durch Einsetzen des Wertes (4) von $dy : dx$ be-digt werde. Dadurch ergeben sich die beiden Bedingungen

$$-ACB_x + BCA_x + ABB_y - B^2A_y + ADD_y - D^2A_y = 0,$$
$$ACD_x - CDA_x - ABD_y + BDA_y - ADB_y + BDA_y = 0.$$

[2]) Monge, „Application de l'analyse à la géométrie", 5. Aufl. Paris 1850, S. 111 124, S. 219, 220; Lie, „Beiträge zur Theorie der Minimalflächen, I", Mathem. alen 14 (1879), S. 331–416.

Führt man hierin die durch A, B, C und ihre Ableitungen ausgedrückte Werte von D, D_x, D_y ein, so gehen die Bedingungen über in:

$$(5) \quad CA_x - AC_x = 2(BA_y - AB_y), \quad CA_y - AC_y = -2(BC_x - CB_x).$$

Dies also sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafü daß die Differentialgleichung (1), in der $B^2 - AC \neq 0$ ist, ein vollkom menes Parallelogramm-Netz in der xy-Ebene definiere.

3. Kennzeichnende Eigenschaft der Haupttangenten-Kurven der Integra flächen von $s^2 - rt = \text{konst.}$

Wendet man die soeben aufgestellten Bedingungen (5) auf die Diff rentialgleichung

$$(6) \qquad r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2 = 0$$

an, deren Integralkurven die Projektionen der Haupttangenten-Kurve (asymptotischen Kurven) einer Fläche $z = f(x, y)$ auf die xy-Ebene sin so ergibt sich

$$tr_x - rt_x = 2(sr_y - rs_y), \qquad tr_y - rt_y = -2(st_x - ts_x)$$

oder, da $r_y = s_x$ und $s_y = t_x$ ist:

$$\frac{\partial(s^2 - rt)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial(s^2 - rt)}{\partial y} = 0,$$

d. h.

$$s^2 - rt = \text{konst.}$$

Also dann und nur dann, wenn auf einer Fläche $s^2 - rt = konst.$ + ist, bilden die Projektionen der Haupttangentenkurven der Fläche a die xy-Ebene ein vollkommenes Parallelogramm-Netz. Daß der Fa $s^2 - rt = 0$ der abwickelbaren Flächen auszuschließen ist, erhellt oh weiteres.

4. Integration der partiellen Differentialgleichung $s^2 - rt = \text{konst.}$

Man weiß, wie diese Differentialgleichung mittels der Charakteristike theorie integriert werden kann[3]). Auf Grund der soeben gefunden Eigenschaft läßt sich aber die Integration auf einem Wege leisten, d gerade dieser Differentialgleichuug besonders angepaßt ist: Nach (2) ka man annehmen, daß auf einer Integralfläche Parameter u, v derart e geführt seien, daß die Gleichungen bestehen:

$$(7) \qquad x = U_1(u) + V_1(v), \qquad y = U_2(u) + V_2(v),$$

---

[3]) Siehe z. B. Darboux, „Leçons sur la théorie générale des surfaces", 3. Paris 1894, S. 273, 274.

rin

$$\Delta = U_1' V_2' - U_2' V_1' \neq 0$$

Dann ist $du\,dv = 0$ die Differentialgleichung der Haupttangenten-rven. Andererseits wird sie durch

$$r dx^2 + 2s\,dx\,dy + t dy^2 = 0$$

gestellt. Führt man hierin vermöge (7) die Veränderlichen u und v statt ınd y ein, so kommt

$$r(U_1' du + V_1' dv)^2 + 2s(U_1' du + V_1' dv)(U_2' du + V_2' dv) + \\ + t(U_2' du + V_2' dv)^2 = 0.$$

also diese Gleichung die Form $du\,dv = 0$ haben muß, ergibt sich:

$$r U_1'^2 + 2s U_1' U_2' + t U_2'^2 = 0, \qquad r V_1'^2 + 2s V_1' V_2' + t V_2'^2 = 0,$$

raus man berechnet:

$$r = -2s\frac{U_2' V_2'}{U_1' V_2' + U_2' V_1'}, \qquad t = -2s\frac{U_1' V_1'}{U_1' V_2' + U_2' V_1'}.$$

ısetzen dieser Werte in die partielle Differentialgleichung

$$s^2 - rt = k^2,$$

$k = \text{konst.} \neq 0$ sei, liefert

$$s = \frac{k}{\Delta}(U_1' V_2' + U_2' V_1').$$

n hat daher

$$r = -\frac{2k}{\Delta} U_2' V_2', \qquad s = \frac{k}{\Delta}(U_1' V_2' + U_2' V_1'), \qquad t = -\frac{2k}{\Delta} U_1' V_1'.$$

iterhin kommt nach (7), wenn p und q die Ableitungen erster lnung von z nach x und y bedeuten:

$$dp = r\,dx + s\,dy = r(U_1' du + V_1' dv) + s(U_2' du + V_2' dv),$$
$$dq = s\,dx + t\,dy = s(U_1' du + V_1' dv) + t(U_2' du + V_2' dv),$$

) durch Einsetzen der für r, s, t gefundenen Ausdrücke:

$$dp = k(-U_2' du + V_2' dv), \qquad dq = k(U_1' du - V_1' dv).$$

hin ist

$$p = k(-U_2 + V_2 + a), \qquad q = k(U_1 - V_1 + b),$$

a und b Konstanten bedeuten. Man bemerkt aber, daß man, ohne die ınahmen (7) zu stören, statt U_1, V_1, U_2, V_2 die Funktionen

$$U_1 + \tfrac{1}{2}b, \qquad V_1 - \tfrac{1}{2}b, \qquad U_2 - \tfrac{1}{2}a, \qquad V_2 + \tfrac{1}{2}a$$

führen darf. Dies kommt darauf hinaus, daß die Integrationskonstanten

a und b in den Ausdrücken für p und q gleich Null angenommen werde dürfen. Dann ergibt sich weiterhin mit Rücksicht auf (7):

$$dz = p\,dx + q\,dy = k[-(U_2 - V_2)(dU_1 + dV_1) + (U_1 - V_1)(dU_2 + dV_2)$$

Dies ist in der Tat ein vollständiges Differential. Mithin sind:

$$(9)\quad \begin{cases} x = U_1 + V_1, \qquad y = U_2 + V_2, \\ z = k\int [(U_1 - V_1)(dU_2 + dV_2) - (U_2 - V_2)(dU_1 + dV_1)] \end{cases}$$

die Gleichungen der Integralflächen der partiellen Differentialgleichung (8 Dabei bedeuten U_1, U_2 willkürliche Funktionen von u allein und V_1, willkürliche Funktionen von v allein, und es muß $U_1' V_2' - U_2' V_1' \neq 0$ a genommen wurden.

5. Geometrische Erzeugung der Integralflächen von $s^2 - rt = \text{kons}$

Unter γ_1 und γ_2 seien die unter (3) mittels des Parameters u bzw. dargestellten Kurven in der xy-Ebene verstanden:

$$(10)\quad \mathfrak{x}_1 = 2U_1(u), \quad \mathfrak{y}_1 = 2U_2(u) \quad \text{und} \quad \mathfrak{x}_2 = 2V_1(v), \quad \mathfrak{y}_2 = 2V_2(v).$$

Indem wir den Parametern u, v irgendwelche bestimmte Werte erteile kommen wir zu bestimmten Punkten P_1 und P_2 auf γ_1 und γ_2. Die $u + du$ und $v + dv$ gehörigen unendlich benachbarten Punkte von und γ_2 seien mit Q_1 und Q_2 bezeichnet. Der Mittelpunkt P der Strec $P_1 P_2$ hat die Koordinaten

$$x = U_1 + V_1, \qquad y = U_2 + V_2$$

wie in (9). Von den Strecken $P_1 P_2$ und $Q_1 Q_2$ und von den Boge elementen $P_1 Q_1$ und $P_2 Q_2$ der Kurven γ_1 und γ_2 wird ein Flächendifferent dw der xy-Ebene begrenzt. Der Inhalt dieses Flächendifferentials d ist bei geeigneter Wahl seines Umlaufsinns gleich dem Doppelten d Integranden, der in dem Wert (9) von z auftritt. Man hat also:

$$z = \tfrac{1}{2} k \int dw.$$

Hieraus ergibt sich: *Um irgendeine Integralfläche der partiell Differentialgleichung* $s^2 - rt = k^2$ ($= konst. \neq 0$) *herzustellen, wähle m willkürlich zwei Kurven* γ_1 *und* γ_2 *in der* xy*-Ebene und verbinde irgen einen Punkt* P_1^0 *der einen Kurve durch eine willkürliche Linie* γ_0 *n irgendeinem Punkt* P_2^0 *der andern. Alsdann nehme man auf* γ_1 *und beliebige Punkte* P_1 *und* P_2 *an und errichte im Mittelpunkt* P *der Strec* $P_1 P_2$ *auf die* xy*-Ebene ein Lot gleich dem* $\frac{1}{2}k$*-fachen des von* γ_0, γ_1, *und der Strecke* $P_1 P_2$ *eingeschlossenen Flächenstücks der* xy*-Eben Der geometrische Ort der Endpunkte aller dieser Lote, der sich ergi*

enn man P_1 und P_2 beliebig auf den Kurven γ_1 und γ_2 wandern läßt, die Integralfläche.

6. Integralfreie Darstellung der Integralflächen.

Führt man in (9) vermöge

$$\mathfrak{u} = kU_2(u), \qquad \mathfrak{v} = -kV_2(v)$$

ue Parameter $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ ein, so werden U_1 und V_1 Funktionen von $\mathfrak{u}$ w. $\mathfrak{v}$ allein. Führt man ferner Funktionen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{u}$ bzw. $\mathfrak{v}$ allein rmöge

$$\frac{d\mathfrak{U}}{d\mathfrak{u}} = -kU_1, \qquad \frac{d\mathfrak{V}}{d\mathfrak{v}} = kV_1$$

, so kommt:

$$x = \frac{1}{k}(\mathfrak{V}' - \mathfrak{U}'), \qquad y = \frac{1}{k}(\mathfrak{u} - \mathfrak{v}),$$

$$z = \frac{1}{k}\int[-(\mathfrak{U}' + \mathfrak{V}')(d\mathfrak{u} - d\mathfrak{v}) + (\mathfrak{u} + \mathfrak{v})(d\mathfrak{U}' - d\mathfrak{V}')].$$

es Integral läßt sich auswerten, so daß sich die folgende integralfreie rstellung der Integralflächen von $s^2 - rt = k^2 = \text{konst.} \neq 0$ ergibt:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{1}{k}(\mathfrak{V}' - \mathfrak{U}'), \qquad y = \frac{1}{k}(\mathfrak{u} - \mathfrak{v}), \\ z &= \frac{1}{k}[(\mathfrak{U}' - \mathfrak{V}')(\mathfrak{u} + \mathfrak{v}) - 2(\mathfrak{U} - \mathfrak{V})]. \end{aligned}\right.$$

erin bedeutet $\mathfrak{U}$ eine willkürliche Funktion von $\mathfrak{u}$ allein und $\mathfrak{V}$ eine will-rliche Funktion von $\mathfrak{v}$ allein[4]).

Berlin-Dahlem, 20. April 1919.

---

[4]) Diese integralfreie Darstellung stimmt mit der von Darboux a. a. O. gege-nen überein. Bei Darboux hat z zwar das entgegengesetzte Vorzeichen, aber ser Umstand ist offenbar unwesentlich.

(Eingegangen am 22. April 1919.)

Neue Begründung der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen.

Von

Kurt Hensel in Marburg a/L.

Die in meiner Abhandlung im zweiten Bande dieser Zeitschr S. 433—452 gegebene Theorie der algebraischen Zahlen kann ohne weiter auf die Untersuchung der algebraischen Funktionen einer Variablen au gedehnt werden, und ihre Ergebnisse sind hier wesentlich einfacher a die dort abgeleiteten. Es scheint mir aber, daß sie eine neue Einsic in die arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabl ergeben. Ich benutze die Bezeichnungen und die Resultate der erwähnt Arbeit, welche ich hier mit A. Z. zitieren werde.

§ 1.

Untersuchung der rationalen Funktionen von z für eine Stelle $\mathfrak{p}$ dieser Variablen.

Ist z eine komplexe Variable, so bilden die rationalen Funktion $Z = \varphi(z)$ von z mit beliebigen konstanten Koeffizienten einen Körper $K($ Jedem konstanten Werte ($z = \alpha$ bzw. $z = \infty$) von z ordne ich eindeu *eine Stelle* $\mathfrak{p}$ zu. Dann besitzt jede Funktion Z dieses Körpers in ei beliebigen Stelle $\mathfrak{p}$ einen eindeutig bestimmten Zahlenwert $Z(\mathfrak{p})$, welch 0, ∞ oder c sein kann, wo hier wie im folgenden c einen bestimmt endlichen und von Null verschiedenen Zahlenwert bezeichnet. Im erst bzw. im zweiten Falle heißt $\mathfrak{p}$ *eine Nullstelle* bzw. *ein Pol* von Z, letzten Falle wird Z eine *Einheit* oder eine *Einheitsfunktion* für di Stelle genannt.

Die Funktion Z heißt *eine ganze Funktion* für die Stelle $\mathfrak{p}$, we $Z(\mathfrak{p})$ endlich ist; ist $Z(\mathfrak{p}) = \infty$, ist also $\mathfrak{p}$ ein Pol für Z, so wird *eine gebrochene Funktion* für diese Stelle genannt. Eine ganze oder brochene Funktion Z heißt durch eine andere U für diese Stelle *teilb* wenn der Quotient Z/U dort ganz ist. Die Einheitsfunktionen, und

lein, sind in *jeder* ganzen Funktion enthalten. Ist sowohl Z durch U s auch U durch Z für die Stelle $\mathfrak{p}$ teilbar, so heißen Z und U *äquivalent* ($Z \sim U(\mathfrak{p})$), und dies ist stets und nur dann der Fall, wenn sich ese Funktionen um eine Einheitsfunktion multiplikativ unterscheiden.

Eine ganze Funktion p heißt eine *Primfunktion für die Stelle* $\mathfrak{p}$, enn sie dort eine Nullstelle hat und nicht in ein Produkt von Faktoren erselben Art zerlegt werden kann. Eine solche Primfunktion für eine ndliche Stelle $z = \alpha$ ist z. B. die Funktion $p = z - \alpha$ für die unendlich rne Stelle, z. B. $p = 1/z$. Alle Primfunktionen für dieselbe Stelle sind nander äquivalent.

Ist p eine Primfunktion für die Stelle $\mathfrak{p}$, so ist jede andere Funktion Z ndeutig in der Form $Z = \varepsilon p^{\varrho}$ darstellbar, wo ϱ eine von der Wahl von unabhängige ganze Zahl und ε eine Einheitsfunktion bedeutet. Der xponent ϱ heißt die *Ordnungszahl* von Z für die Stelle $\mathfrak{p}$. $\mathfrak{p}$ ist eine ullstelle oder ein Pol für Z, je nachdem ϱ positiv oder negativ ist; ist gleich Null, so ist Z eine Einheit für $\mathfrak{p}$.

Wir ordnen nun jeder Stelle $\mathfrak{p}$ einen *Divisor* zu, welcher ebenfalls urch $\mathfrak{p}$ bezeichnet werden soll, und definieren die Teilbarkeit einer unktion Z durch eine Potenz von $\mathfrak{p}$ folgendermaßen:

Z heißt durch $\mathfrak{p}^r$ *teilbar*, wenn Z in der zugehörigen Stelle $\mathfrak{p}$ mindestens die Ordnungszahl r besitzt. Zwei Funktionen Z und Z' heißen *modulo* $\mathfrak{p}^r$ *kongruent*, wenn ihre Differenz mindestens durch $\mathfrak{p}^r$ teilbar ist.

Hieran schließt sich die für das Folgende besonders wichtige Definition er Gleichheit zweier Funktionen für eine Stelle $\mathfrak{p}$:

Zwei Funktionen Z und Z' heißen *gleich für die Stelle* $\mathfrak{p}$, wenn sie für jede noch so hohe Potenz von $\mathfrak{p}$ kongruent sind. Zwei rationale Funktionen Z und Z' sind stets und nur dann für eine Stelle $\mathfrak{p}$ gleich, wenn sie identisch sind.

Jede Funktion Z ist für den Bereich von $\mathfrak{p}$ gleich einer Entwicklung:

$$Z = a_{\varrho} p^{\varrho} + a_{\varrho+1} p^{\varrho+1} + \ldots + a_{\sigma-1} p^{\sigma-1} + A_{\sigma}(z) p^{\sigma}, \tag{.}$$

i welcher $a_{\varrho}, a_{\varrho+1}, a_{\varrho+2}, \ldots$ eindeutig bestimmte Zahlkoeffizienten sind, elche beliebig weit berechnet werden können, und wo bei Abschluß er Rechnung bei einer beliebigen σ-ten Stelle das Element $A_{\sigma}(z)$ eine r die Stelle $\mathfrak{p}$ ganze rationale Restfunktion ist. Die beliebig weit fortetzbare Reihe der rationalen Funktionen

$$a_{\varrho} p^{\varrho}, \quad a_{\varrho} p^{\varrho} + a_{\varrho+1} p^{\varrho+1}, \quad a_{\varrho} p^{\varrho} + a_{\varrho+1} p^{\varrho+1} + a_{\varrho+2} p^{\varrho+2}, \ldots \tag{a}$$

ird *die Reihe der sukzessiven Näherungswerte von* Z *für die Stelle* $\mathfrak{p}$ enannt. Die Zahlkoeffizienten $a_{\varrho}, a_{\varrho+1}, a_{\varrho+2}, \ldots$ hängen durch eine ekursionsformel miteinander zusammen.

§ 2.

Der Körper $\bar{K}(\mathfrak{p})$ der zur Stelle $\mathfrak{p}$ gehörigen Potenzreihen und d Körper $K(\mathfrak{p})$ der konvergenten Potenzreihen.

Ich betrachte jetzt den Bereich aller Potenzreihen

$$\bar{Z} = a_\varrho p^\varrho + a_{\varrho+1} p^{\varrho+1} + \tag{2}$$

mit beliebigen konstanten Koeffizienten, deren Entwicklungselement eine Primfunktion für die Stelle $\mathfrak{p}$ ist, also etwa $z - a$ bzw. $\frac{1}{z}$, und dere Koeffizienten soweit man will berechnet werden können. Dabei soll vol ständig davon abgesehen werden, ob diese Reihe in einer endlichen Un gebung jener Stelle konvergiert oder nicht. Auch hier nennen wir d Reihe der rationalen Funktionen

$$a_\varrho p^\varrho, \quad a_\varrho p^\varrho + a_{\varrho+1} p^{\varrho+1}, \quad \ldots \tag{2a}$$

die sukzessiven Näherungswerte von $\bar{Z}$. Wir nennen zwei solche Reihe $\bar{Z}$ und $\bar{Z}'$ wieder kongruent modulo $\mathfrak{p}^r$, wenn alle ihre Näherungswerte fü diesen Modul kongruent sind, und genau wie vorher sollen zwei solch Reihen gleich heißen, wenn sie für jede noch so hohe Potenz von kongruent, wenn sie also identisch sind. Definiert man dann die Summ und das Produkt von zwei Potenzreihen wie gewöhnlich, so erkennt ma daß die Gesamtheit aller dieser Reihen einen Körper bildet, welchen ic durch $\bar{K}(\mathfrak{p})$ bezeichne.

Einen Teilkörper $K(\mathfrak{p})$ des Körpers $\bar{K}(\mathfrak{p})$ aller Potenzreihen (2 erhält man, wenn man nur diejenigen Potenzreihen in p betrachtet, welch in einer endlichen, wenn auch noch so kleinen Umgebung der Stelle konvergieren; denn die Summe, die Differenz, das Produkt und der Quotie konvergenter Potenzreihen ist ja wieder eine solche. Ich will $K(\mathfrak{p})$ auc *den Körper der Funktionselemente für die Stelle* $\mathfrak{p}$ nennen.

Ich nenne endlich eine rationale Funktion $Z = \varphi(z)$ von z für de Bereich von $\mathfrak{p}$ gleich einer Potenzreihe $\bar{Z} = a_\varrho p^\varrho + a_{\varrho+1} p^{\varrho+1} + \ldots$, wen Z für jede noch so hohe Potenz von $\mathfrak{p}$ kongruent $\bar{Z}$ ist. Dann folgt au (1), daß jedes Element $Z = \varphi(z)$ von $K(z)$ für den Bereich der Stelle einer einzigen Potenzreihe von $\bar{K}(\mathfrak{p})$ gleich ist, nämlich derjenige rekurrenten Reihe, welche sich aus (1) für ein über jedes Maß hinau wachsendes σ ergibt. Bei dieser Definition der Gleichheit ist also d Körper $K(z)$ aller rationalen Funktionen ein Unterkörper des Körpe $\bar{K}(\mathfrak{p})$ aller Potenzreihen für die Stelle $\mathfrak{p}$.

Durch Majorantenbildung kann man aber noch weiter zeigen, da $K(z)$ ein Teilkörper des Teilkörpers $K(\mathfrak{p})$ von $\bar{K}(\mathfrak{p})$ ist, daß nämli alle rekurrenten Potenzreihen, denen die rationalen Funktionen Z von

r den Bereich von $\mathfrak{p}$ gleich sind, innerhalb einer endlichen Umgebung n $\mathfrak{p}$ konvergieren und dort diese Funktionen Z darstellen. (Vgl. z. B. ensel-Landsberg, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen, 8—11. Dies Werk soll im folgenden durch H.-L. zitiert werden.) Und ar stehen jene beiden Körper in der Beziehung zueineinander, daß jedes ement von $K(z)$ zu $K(\mathfrak{p})$ gehört, und daß umgekehrt jedes Element n $K(\mathfrak{p})$ der Grenzwert einer Reihe (2a) von Elementen von $K(z)$ ist.

§ 3.

ıtersuchung der algebraischen Funktionen von z für eine Stelle $\mathfrak{p}$ ser Variablen. Die Kongruenzringe $\bar{R}(u, \mathfrak{p})$ und ihre Zurückführung auf Kongruenzkörper $\bar{K}(u, \mathfrak{p})$.

Es sei nun die Variable u eine algebraische Funktion von z, d. h. u rde als Funktion von z durch eine irreduzible Gleichung n-ten Grades

$$f(u, z) = u^n + a_1(z)\,u^{n-1} + \ldots + a_n(z) = 0$$

t rationalen Funktionen von z als Koeffizienten definiert. Dann bilden e rationalen Funktionen von u und z einen Körper $\mathfrak{R}(u, z)$, dessen tersuchung den Gegenstand der Theorie der algebraischen Funktionen er Variablen bildet. Dieser ist isomorph dem Kongruenzkörper

$$\bar{K}(u, z) = K_z(u, \bmod f(u, z))$$

r modulo $f(u, z)$ betrachteten rationalen Funktionen von u und z; folgenden soll daher dieser statt des Körpers $\mathfrak{R}(u, z)$ untersucht werden.

Der Körper $K(u, z)$ ist, in bezug auf den Körper $K(z)$ aller ratio- en Funktionen von z allein, ein algebraischer Körper n-ten Grades, n die n Elemente $(1, u, u^2, \ldots, u^{n-1})$ sind in bezug auf $K(z)$ linear bhängig, während je $(n+1)$ Elemente desselben $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ stets ar abhängig sind. Je n linear unabhängige Elemente $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ßen *eine Basis für* $K(u, z)$. Jedes Element v dieses Körpers ist durch e beliebige Basis (u_i) eindeutig in der Form:

$$v = c_1 u_1 + \ldots + c_n u_n$$

rationalen Koeffizienten c_i darstellbar. Jedes Element $v = \varphi(u, z)$ ügt einer sog. *Hauptgleichung* n-ten Grades $g(v, z) = 0$ in $K(z)$ Z. S. 435 (2)), deren linke Seite entweder irreduzibel oder die Potenz r irreduziblen Funktion ist. Im ersten Falle heißt v ein *primitives ment* von $K(u, z)$, und der Kongruenzkörper $K(u, z)$ ist isomorph Kongruenzkörper

$$K(v, z) = K_z(v, \bmod g(v, z))$$

r modulo $g(v, z)$ betrachteten rationalen Funktionen von v und z und

kann daher, wenn dies erwünscht sein sollte, statt des Kongruenzkörpe $K(u,z)$ der Untersuchung zugrunde gelegt werden.

Ich betrachte nun alle Elemente $v=\varphi(u,z)$ von $K(u,z)$ für de Bereich einer beliebigen endlichen oder der unendlich fernen Stelle $\mathfrak{p}$ d unabhängigen Veränderlichen z. Dann können alle Koeffizienten von in konvergente Potenzreihen entwickelt werden, welche nach Potenz einer beliebigen Primfunktion p für diese Stelle (z. B. $p=z-\alpha$ bzw. $p=$ fortschreiten. Sie bilden also einen Teilbereich des größeren Bereiches

$$\bar{R}(u,\mathfrak{p})=\bar{R}_{\mathfrak{p}}(u,\ \mathrm{mod}\, f(u,z)) \tag{4b}$$

aller modulo $f(u,z)$ ganzen Funktionen von u, deren Koeffizienten b liebige konvergente oder nicht konvergente Potenzreihen von p sind. Al ist $K(u,z)$ ein Teilkörper dieses Bereiches $\bar{R}(u,\mathfrak{p})$, welcher nun weit untersucht werden soll.

Der wesentliche Unterschied zwischen dem Kongruenzkörper $K(u,$ und diesem erweiterten Bereiche $\bar{R}(u,\mathfrak{p})$ besteht darin, daß in de letzteren die Funktion $f(u,z)$ im allgemeinen nicht unzerlegbar bleib sondern in ein Produkt von eindeutig bestimmten unzerlegbaren Pri faktoren zerfällt, welche jedoch alle voneinander verschieden sind. Es

$$f(u,z)=f_1(u,\mathfrak{p})f_2(u,\mathfrak{p})\ldots f_\nu(u,\mathfrak{p}) \tag{5}$$

diese Zerlegung; dann ist jeder dieser Faktoren $f_i(u,\mathfrak{p})$ eine in $\bar{K}($ irreduzible ganze Funktion von u, deren Koeffizienten Potenzreihen sin welche nach ganzen Potenzen der Primfunktion p fortschreiten.

Alle modulo $f(u,z)$ ganzen Funktionen $v=\varphi(u,\mathfrak{p})$ des Bereich $R(u,\mathfrak{p})$ bilden wegen der Zerlegbarkeit des Moduls nicht einen Ko gruenz*körper*, sondern nur einen Kongruenz*ring*, denn in ihm sind n die elementaren Rechenoperationen der Addition, Subtraktion und Mu plikation, nicht aber die der Division unbeschränkt und eindeutig a führbar. Dagegen kann die Untersuchung der Elemente dieses Rin $\bar{R}(u,\mathfrak{p})$ leicht und einfach auf diejenige der ν folgenden Kongruenzkör

$$\bar{K}_i(u,\mathfrak{p})=\bar{K}_{\mathfrak{p}}(u,\ \mathrm{mod}\, f_i(u,\mathfrak{p}))\qquad (i=1,2,\ldots \tag{6}$$

aller modulo der ν Primfunktionen $f_1(u,\mathfrak{p}),\ldots,f_\nu(u,\mathfrak{p})$ ganzen Funktion von u innerhalb $K(\mathfrak{p})$ zurückgeführt werden (A. Z. § 1).

Bezeichnen wir nämlich wie a. a. O. die zu den ν Primfaktoren $f_i(u$ komplementären Faktoren von $f(u,z)$ durch $F_i(u,\mathfrak{p})$, und sind allgem $G_i(u,\mathfrak{p})$ die durch das Euklidische Teilerverfahren bestimmbaren Mu plikatoren, für welche die Gleichung besteht:

$$F_1(u,\mathfrak{p})\cdot G_1(u,\mathfrak{p})+\ldots+F_\nu(u,\mathfrak{p})\cdot G_\nu(u,\mathfrak{p})\equiv 1\pmod{f(u,z)},$$

so gelten für die ν so gefundenen Funktionen:

a) $$F_i(u,\mathfrak{p})\cdot G_i(u,\mathfrak{p}) = 1_i$$

e Beziehungen:

) $$\begin{aligned} 1_i &\equiv \delta_{ik} \pmod{f_k(u,\mathfrak{p})}, \\ 1_i 1_k &\equiv \delta_{ik}\cdot 1_k \pmod{f(u,z)}, \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} \delta_{ik}=0 \text{ für } i \gtrless k \\ =1 \text{ für } i=k \end{pmatrix}$$

d hieraus ergibt sich für jede modulo $f(u,z)$ ganze Funktion $v=\varphi(u,z)$ s Ringes $\bar{R}(u,\mathfrak{p})$ die folgende eindeutig bestimmte Darstellung:

a) $$\begin{aligned} v &\equiv v_1\cdot 1_1 + v_2\cdot 1_2 + \ldots + v_\nu\cdot 1_\nu \pmod{f(u,z)} \\ &= (v_1, v_2, \ldots, v_\nu), \end{aligned}$$

allgemein

b) $$v_i \equiv v \pmod{f_i(u,\mathfrak{p})},$$

h. der Wert von v in dem i-ten Kongruenzkörper $\bar{K}_i(u,\mathfrak{p})$ ist. Sind ngekehrt $v_1, \ldots, v_\nu$ beliebige Elemente jener Kongruenzkörper $\bar{K}_1, \ldots, \bar{K}_\nu$, enthält der Ring $\bar{R}(u,\mathfrak{p})$ ein einziges Element $v = v_1\cdot 1_1 + \ldots + v_\nu\cdot 1_\nu$, lches gerade diese Werte v_i in den Körpern $\bar{K}_i$ besitzt.

Sind ferner $v=(v_1,\ldots,v_\nu)=(v_i)$, $w=(w_1,\ldots,w_\nu)=(w_i)$ zwei be- bige Elemente von $\bar{R}(u,\mathfrak{p})$ in dieser Darstellung, so folgen aus den eichungen (7) für ihre Summe, Differenz, Produkt und ihren Quotienten e entsprechenden Darstellungen:

c) $$v\pm w = (v_i \pm w_i), \qquad vw = (v_i w_i), \qquad \frac{v}{w} = \left(\frac{v_i}{w_i}\right);$$

e letzte Gleichung besteht aber dann und nur dann, wenn $\frac{v}{w}$ wirklich m Ringe $\bar{R}(u,\mathfrak{p})$ angehört, denn allein in diesem Falle sind ja alle mponenten w_i von Null verschieden. Werden also für zwei solche ements (v_i) und (w_i) die Verknüpfungsoperationen der Addition und ltiplikation durch die Gleichungen

d) $$(v_i)+(w_i) = (v_i+w_i), \qquad (v_i)(w_i) = (v_i w_i)$$

finiert, so wird der Ring $R(u,\mathfrak{p})$ einstufig isomorph auf das System $\bar{K}_1(u,\mathfrak{p}),\ldots,\bar{K}_\nu(u,\mathfrak{p}))$ der ν zu den Primfaktoren $f_i(u,\mathfrak{p})$ von $f(u,z)$ hörigen Kongruenzkörper abgebildet.

Jedes Element $v=(v_i)$ des Ringes $\bar{R}(u,\mathfrak{p})$ genügt in demselben ier Hauptgleichung $g(t,\mathfrak{p})=0$ vom n-ten Grade; andererseits genügt le seiner Komponenten v_i im zugehörigen Körper $\bar{K}_i(u,\mathfrak{p})$ einer Haupt- eichung $g_i(t,\mathfrak{p})=0$ vom λ_i-ten Grade, deren linke Seite irreduzibel oder e Potenz einer irreduziblen Funktion ist, je nachdem v_i in $\bar{K}_i(u,\mathfrak{p})$ mitiv oder imprimitiv ist. Die linken Seiten jener Hauptgleichungen ngen dann durch die Beziehung

$$(8) \qquad g(t,\mathfrak{p}) = \prod_{i=1}^{\nu} g_i(t,\mathfrak{p})$$

miteinander zusammen (A. Z. S. 437, (9a)).

Jedem von den ν Kongruenzkörpern $\overline{K}_i(u,\mathfrak{p})$ ordne ich nun ein Stelle $\mathfrak{P}_i$ zu und nenne v_i den Wert eines Elementes $v = \varphi(u,z)$ fü diese Stelle, wenn v_i der Kongruenzwert von v modulo $f_i(u,\mathfrak{p})$, d. h. in Kongruenzkörper $\overline{K}_i(u,\mathfrak{p})$ ist. Dann gehören also zu der einen Stelle genau ν Stellen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_\nu$, entsprechend den ν Primfaktoren vo $f(u,z)$ innerhalb $K(p)$.

Durch diese Resultate ist die Untersuchung eines beliebigen Ring $\overline{R}(u,\mathfrak{p})$ vollständig auf diejenige eines beliebigen Kongruenzkörpers

$$(9) \qquad \overline{K}(u,\mathfrak{p}) = \overline{K}(u, \bmod f(u,\mathfrak{p}))$$

aller modulo $f(u,\mathfrak{p})$ ganzen rationalen Funktionen von u für diese Modul mit konvergenten oder nicht konvergenten Potenzreihen innerha $\overline{K}(\mathfrak{p})$ als Koeffizienten zurückgeführt, wenn $f(u,\mathfrak{p})$ eine beliebige Prim funktion innerhalb $\overline{K}(\mathfrak{p})$ bedeutet. Diese Untersuchung soll im folgend Paragraphen durchgeführt werden.

§ 4.

Der Kongruenzkörper $\overline{K}(u,\mathfrak{p})$ und der ihm gleiche Körper $\overline{K}(\mathfrak{P})$ aller Potenzreihen für die zu $\mathfrak{p}$ gehörige Stelle $\mathfrak{P}$.

Es sei also jetzt

$$(10) \qquad f(u,\mathfrak{p}) = u^\lambda + a_1(\mathfrak{p})u^{\lambda-1} + \ldots + a_\lambda(\mathfrak{p})$$

eine Primfunktion λ-ten Grades innerhalb $\overline{K}(\mathfrak{p})$. Dann genügt jedes Eleme $v = \varphi(u,\mathfrak{p})$ des zugehörigen Kongruenzkörpers $\overline{K}(u,\mathfrak{p}) = \overline{K}(u, \bmod f(u,\mathfrak{p}$ einer Hauptgleichung λ-ten Grades

$$(10a) \qquad g(v,\mathfrak{p}) = v^\lambda + b_1(\mathfrak{p})v^{\lambda-1} + \ldots + b_\lambda(\mathfrak{p}) = 0,$$

deren linke Seite irreduzibel oder die Potenz einer in $\overline{K}(\mathfrak{p})$ irreduzibl Funktion ist. Wir nennen v *algebraisch ganz* oder *gebrochen*, je nachde die Koeffizienten $b_i(\mathfrak{p})$ ihrer Hauptgleichung alle oder nicht alle ganz sin Dann gilt auch hier der Fundamentalsatz (A. Z., S. 440):

Ein Element v des Körpers $\overline{K}(u,\mathfrak{p})$ ist algebraisch ganz od gebrochen, je nachdem seine Norm:

$$(10b) \qquad n(v) = (-1)^\lambda b_\lambda(\mathfrak{p})$$

ganz oder gebrochen ist.

Dieser Satz wird wörtlich ebenso wie a. a. O. bewiesen. Aus ihm e geben sich alle Sätze über die Teilbarkeitseigenschaften der Elemente

lche dort auf S. 441 und 442 zusammengestellt sind. Speziell folgt raus, daß die ganzen Elemente des Körpers $\bar{K}(u, \mathfrak{p})$ einen Ring bilden, ssen Elemente sich durch Addition, Subtraktion und Multiplikation eder erzeugen.

Da die Norm eines jeden ganzen Elementes, welches keine Einheit eine positive ganzzahlige Ordnungszahl hat, so muß es wenigstens ein nzes Element π geben, für welches die Ordnungszahl von $n(\pi)$ positiv d möglichst klein ist. Jedes solche Element soll *eine Primfunktion den Körper* $\bar{K}(u, \mathfrak{p})$ oder für die ihm zugeordnete Stelle $\mathfrak{P}$ heißen, d die Ordnungszahl f ihrer Norm werde *ihr Grad* genannt. Dann ist es andere ganze oder gebrochene Element v wieder eindeutig in der rm $v = \varepsilon \pi^a$ darstellbar, wo ε eine Einheit ist, und die ganze Zahl a *Ordnungszahl* von v für die Stelle $\mathfrak{P}$ heißt; alle und nur die Elemente n nicht negativer Ordnungszahl a sind algebraisch ganz. Ist speziell $= \varepsilon \pi^e$, enthält also die Primfunktion p für die Stelle $\mathfrak{p}$ genau die e Potenz der Primfunktion für $\mathfrak{P}$, so heißt e *die Ordnung von* π. Geht n in der obigen Gleichung für p zur Norm über, so ergibt sich $p^\lambda = p^{ef}$. e Ordnung e und der Grad f einer Primfunktion π sind also komplementäre Teiler von λ. Es wird gleich gezeigt werden, daß für alle hier rachteten Kongruenzkörper stets $e = \lambda$, also $f = 1$ ist.

Im Körper $\bar{K}(u, \mathfrak{p})$ hört $p \sim \pi^e$ auf, ein Primteiler zu sein, und an ne Stelle tritt die Primfunktion π oder irgendein äquivalentes Element $= \varepsilon \pi$. Für die Teilbarkeit der Elemente von $\bar{K}(u, \mathfrak{p})$ durch eine beige Potenz von π gelten die folgenden Sätze: Zwei Elemente v und v' ßen wieder *kongruent modulo* π^e *oder modulo* $\mathfrak{P}^e$, wenn $v - v'$ durch teilbar, wenn also $n(v - v')$ mindestens durch p^{fe} teibar ist. Zwei mente v und v' sind dann und nur dann für jede noch so hohe Potenz π kongruent, wenn $n(v - v')$ durch jede Potenz von p teilbar, d. h. ich Null ist. Dann sind aber nach dem soeben angegebenen Satze alle Koeffiten der Hauptgleichung λ-ten Grades $n(t - \gamma) = t^\lambda - \ldots \pm n(\gamma) = 0$, $\gamma = (v - v')$ genügt, gleich Null, d. h. es ist $\gamma^\lambda = (v - v')^\lambda = 0$ oder $= v'$. Es besteht also der wichtige Satz:

Zwei Elemente v und v' des Bereiches $K(u, \mathfrak{p})$ sind dann und nur dann für jede noch so hohe Potenz von π kongruent, wenn sie gleich sind.

Jedes ganze Element v ist modulo π einer endlichen Konstanten, nlich derjenigen Zahl c kongruent, für welche:

$$n(c - \gamma) = c^\lambda - b_1(\mathfrak{p}) c^{\lambda-1} + \ldots \pm b_\lambda(\mathfrak{p}) \equiv 0 \pmod{p}$$

für welche also die Zahlengleichung besteht:

$$c^\lambda - b_1(0) c^{\lambda-1} + \ldots \pm b_\lambda(0) = 0.$$

Diese Gleichung besitzt nur eine einzige λ-fache Wurzel, denn hätte sie zwei verschiedene Wurzeln c und c', so wären diese modulo π kongruent d. h. $n(c-c')=(c-c')^{\lambda}=0$.

Für irgendein algebraisch ganzes Element v ergibt sich also eine be liebig weit fortsetzbare Reihe von Gleichungen:

$$v=c_0+\pi v_1,\quad v_1=c_1+\pi v_2,\quad \ldots,$$

in denen die $c_0, c_1, c_2, \ldots$ Konstanten, die $v_1, v_2, \ldots$ ganze Elemente sind und aus ihnen erhält man genau wie in (1) für eine beliebig hohe Potenz von π eine eindeutig bestimmte Darstellung

$$v=c_0+c_1\pi+c_2\pi^2+\ldots+c_{\sigma-1}\pi^{\sigma-1}+v_\sigma\pi^\sigma, \tag{11}$$

in welcher das Restglied v_σ wieder ein ganzes Element des Körpers bedeutet.

Ich betrachte jetzt die Gesamtheit aller unendlichen Reihen:

$$U=c_\varrho\pi^\varrho+c_{\varrho+1}\pi^{\varrho+1}+\ldots \tag{12}$$

mit konstanten Koeffizienten $c_\varrho, c_{\varrho+1}, \ldots$, welche beliebig weit berechnet werden können und deren Entwicklungselement π eine Primfunktion des Körpers $\bar{K}(u,\mathfrak{p})$ für die Stelle $\mathfrak{P}$ ist. Dabei soll vollständig davon abgesehen werden, ob diese Reihe in einer endlichen Umgebung jener Stelle konvergiert oder nicht. Die Elemente des Körpers $\bar{K}(u,\mathfrak{p})$

$$c_\varrho\pi^\varrho,\quad c_\varrho\pi^\varrho+c_{\varrho+1}\pi^{\varrho+1},\quad \ldots \tag{12a}$$

werden wieder die sukzessiven *Näherungswerte von U* genannt. Zwei solche Reihen U und U' heißen *kongruent modulo* $\mathfrak{P}^r$, wenn alle ihre Näherungswerte modulo $\mathfrak{P}^r$, d. h. modulo π^r kongruent sind, und es sollen U und U' *gleich* genannt werden, wenn sie für jede noch so hohe Potenz von $\mathfrak{P}$ kongruent, wenn sie also identisch sind. Definiert man dann die Summe und das Produkt zweier solchen Reihen wie gewöhnlich, so bilden diese Reihen wieder einen Körper, welchen ich durch $\bar{K}(\mathfrak{P})$ bezeichnen will.

Ich nenne endlich wieder ein Element $v=\varphi(u,\mathfrak{p})$ des Kongruenzkörpers $\bar{K}(u,\mathfrak{p})$ *gleich einer Reihe* $V=\Sigma c_\sigma\pi^\sigma$ dieses Körpers $\bar{K}(\mathfrak{P})$, wenn v für jede noch so hohe Potenz von $\mathfrak{P}$ kongruent V ist. Daraus folgt aus der Gleichung (11), daß jedes Element v von $\bar{K}(u,\mathfrak{p})$ für den Bereich der Stelle $\mathfrak{P}$ einer einzigen Potenzreihe V von $\bar{K}(\mathfrak{P})$ gleich ist, nämlich derjenigen Reihe, welche sich aus (11) für ein über jedes Maß hinaus wachsendes σ ergibt. Hiernach ist also der Kongruenzkörper $\bar{K}(u,$ ein Unterkörper des Körpers $\bar{K}(\mathfrak{P})$ aller Potenzreihen (12).

Umgekehrt ist aber auch jede Potenzreihe $V=\Sigma c_\sigma\pi^\sigma$ eine Elemente v des Körpers $K(u,\mathfrak{p})$ gleich, d. h. die beiden Körper $\bar{K}(u,\mathfrak{p})$ und $\bar{K}(\mathfrak{P})$ sind identisch

Ist nämlich $(x_1, \ldots, x_\lambda)$ eine Basis von $K(u, \mathfrak{p})$, deren Elemente x_i ebraisch ganz sind, was ja stets vorausgesetzt werden kann, so ist es Element $c_\nu \pi^\nu$ eindeutig in der Form:

$$) \qquad c_\nu \pi^\nu = c_1^{(\nu)} x_1 + c_2^{(\nu)} x_2 + \ldots + c_\lambda^{(\nu)} x_\lambda$$

stellbar, deren Koeffizienten $c_i^{(\nu)}$ Potenzreihen aus $\overline{K}(\mathfrak{p})$ sind; und da unbegrenzt wachsendem ν $c_\nu \pi^\nu$ durch jede noch so hohe Potenz von π auch von p algebraisch teilbar ist, so nähert sich $c_\nu \pi^\nu$ mit wachsendem ν der Grenze Null, d. h. die Ordnungszahlen der λ Koeffizienten $c_i^{(\nu)}$ chsen mit zunehmendem ν über jedes Maß hinaus. Also wird die unliche Reihe:

$$) \quad V = \Sigma c_\nu \pi^\nu = (\Sigma c_1^{(\nu)}) x_1 + \ldots + (\Sigma c_\lambda^{(\nu)}) x_\lambda = c_1 x_1 + \ldots + c_\lambda x_\lambda = v$$

eindeutig bestimmtes Element v des Körpers $\overline{K}(u, \mathfrak{p})$, da seine Koeffiten $c_i = \Sigma c_i^{(\nu)}$ jede Potenz von p mit einem endlichen Zahlkoeffizienten ltipliziert enthalten [1]).

Die Primfunktion π ist nun ein primitives Element des Körpers $\overline{K}(u, \mathfrak{p})$, . sie genügt innerhalb $\overline{K}(\mathfrak{p})$ einer *irreduziblen* Hauptgleichung λ-ten Grades. hlt man nämlich statt der unendlich vielen Elemente 0-ter, erster, eiter, ... Ordnung $1, \pi, \ldots, \pi^{e-1}, \pi^e, \pi^{e+1}, \ldots$ die ihnen äquivalenten

---

[1]) Um dieses wichtige Resultat noch ausführlicher zu begründen, bemerke ich endes: Sind

$$v = v_1 x_1 + \ldots + v_\lambda x_\lambda \quad \text{und} \quad w = w_1 x_1 + \ldots + w_\lambda x_\lambda$$

i ganze Elemente von $K(u, \mathfrak{p})$, so ist auch $vw = \sum_{i,k} v_i (x_i x_k) w_k$ algebraisch ganz; gleiche gilt somit von allen λ Koeffizienten der Hauptgleichung für vw:

$$n(t - vw) = t^\lambda - b_1(vw) t^{\lambda-1} + \ldots \pm b_\lambda(vw).$$

ziell ist also der erste dieser Koeffizienten:

$$b_1(vw) = \sum_i \sum_k v_i c_{ik} w_k$$

z, wo allgemein $c_{ik} = b_1(x_i x_k)$ der erste Koeffizient der Hauptgleichung für das dukt der beiden Basiselemente x_i und x_k ist. Die Determinante $|c_{ik}| = C$, die Diskriminante des Systems $(x_1, \ldots, x_\lambda)$, ist sicher von Null verschieden, wenn selbe, wie angenommen wurde, eine Basis ist.

Ist nun speziell v durch eine Potenz p^ν von p teilbar, also $\frac{v}{p^\nu}$ algebraisch ganz, st also für beliebige *ganze* Elemente $w_1, \ldots w_\lambda$ $b_1(vw)$ durch p^ν teilbar. Wählt n also speziell $w_1 \ldots w_\lambda$ gleich den Elementen $C_{1i}, C_{2i}, \ldots, C_{\lambda i}$ der i-ten Spalte adjungierten Systems zu (c_{ik}), so folgt, daß jedes Cv_i durch p^ν teilbar sein 3. Ein Element $v = v_1 x_1 + \ldots + v_\lambda x_\lambda$ ist also nur dann algebraisch teilbar durch Potenz p^ν, wenn alle Produkte Cv_i diese Potenz enthalten. Hieraus folgt , daß die Ordnungszahlen der Koeffizienten $c_i^{(\nu)}$ der Elemente $c_\nu \pi^\nu$ in (13) wirk- mit zunehmendem ν über jedes Maß hinaus wachsen.

Elemente $1, \pi, \ldots, \pi^{e-1}, p, p\pi, \ldots, p\pi^{e-1}, p^2, p^2\pi, \ldots$, so ergibt sic genau wie in (11), daß jedes ganze Element v des Körpers $\overline{K}(u,$ auch durch sie homogen und linear mit konstanten Koeffizienten darstel bar ist. Und hieraus folgt, wenn man alle mit $1, \pi, \pi^2, \ldots, \pi^{e-1}$ mu tiplizierten Glieder zusammenfaßt, für jedes algebraisch ganze Element die folgende eindeutige Darstellung

$$v = c_0 + c_1\pi + c_2\pi^2 + \ldots + c_{e-1}\pi^{e-1}$$

mit ganzen Potenzreihen von p als Koeffizienten. Ist dagegen v g brochen, also von negativer Ordnungszahl, so liefert die entsprechen Betrachtung eine gleiche eindeutige Darstellung von v durch das Syste $(1, \pi, \ldots, \pi^{e-1})$, in welcher aber mindestens einer der Koeffizienten von negativer Ordnung in p ist. Hieraus folgt zunächst, daß das Syste $(1, \pi, \ldots, \pi^{e-1})$ eine Basis für den Körper λ-ter Ordnung $\overline{K}(u, \mathfrak{p})$ is es muß also $e = \lambda$ sein. Hieraus folgt der schon auf S. 125 angekündigte Sat

Die Ordnung der Primfunktion π in einem beliebigen Kongruen körper λ-ten Grades ist stets gleich λ; ihr Grad f ist demnac gleich 1.

Ein Element π dieses Kongruenzkörpers $\overline{K}(u, \mathfrak{p})$ ist hiernach da und nur dann eine Primfunktion, wenn $n(\pi) \sim p$ vom ersten Grade is

Zweitens bildet dasselbe System $(1, \pi, \pi^2, \ldots, \pi^{\lambda-1})$ ein sog. *Fu damentalsystem* für den Körper $\overline{K}(u, \mathfrak{p})$, d. h. eine solche Basis, daß al und nur die *ganzen* Elemente desselben durch dieses homogen und line mit *ganzen* Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_{\lambda-1}$ darstellbar sind.

Das primitive Element π genügt innerhalb $\overline{K}(\mathfrak{p})$ einer irreduzibl Hauptgleichung:

$$g(v) = n(v - \pi) = u^\lambda - pb_1(\mathfrak{p})u^{\lambda-1} + \ldots \pm pb_\lambda(\mathfrak{p}) = 0,$$

deren konstantes Glied $n(\pi)$ genau durch die erste Potenz von p teilb ist; und daraus folgt wegen (10b), daß alle anderen Koeffizienten ebe falls p enthalten; auch hieraus ergibt sich, daß diese Gleichung innerha $\overline{K}(\mathfrak{p})$ irreduzibel sein muß, weil sie sonst in Faktoren *derselben Art* ze fallen müßte.

Unter den unendlich vielen zu π äquivalenten Primzahlen $\pi' =$ kann man nun stets eine solche auswählen, welche der einfachsten Gl chung dieser Art, nämlich der reinen Gleichung:

$$\pi^\lambda = p \tag{15}$$

genügt. Ist dies nämlich für die gewählte Primzahl π noch nicht d Fall, so beginne die Entwicklung von π^λ nach Potenzen von π mit d Anfangsgliedern

$$\pi^\lambda = p + c\pi^{\lambda+r} + \ldots \qquad (r >$$

setzt man dann π durch die äquivalente Primzahl:

$$\pi' = \pi - \frac{c}{\lambda}\pi^{r+1},$$

für $\pi = \pi' + \frac{c}{\lambda}\pi'^{r+1} + \ldots$ wird, so geht die obige Gleichung über in:

$$\left(\pi' + \frac{c}{\lambda}\pi'^{r+1} + \ldots\right)^{\lambda} = p + c(\pi' + \ldots)^{\lambda+r} + \ldots,$$

welcher sich das Glied $(\lambda + r)$-ter Ordnung forthebt. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man also zuletzt eine Primfunktion π_0, welche der reinen Gleichung $\pi_0^{\lambda} = p$ genügt. Es kann und soll daher von nunmehrein π als eine Wurzel dieser Hauptgleichung $g(v, \mathfrak{p}) = v^{\lambda} - p = 0$ als ausgesetzt werden.

Ist v ein primitives Element des Kongruenzkörpers $\bar{K}(u, \mathfrak{p})$, und $g(u - v) = g(v, \mathfrak{p}) = 0$ die irreduzible Hauptgleichung, der v genügt, so wie in (4a) hervorgehoben wurde, der zu untersuchende Kongruenzkörper $\bar{K}(u, \mathfrak{p})$ isomorph dem Kongruenzkörper

$$\bar{K}(v, \mathfrak{p}) = \bar{K}(v, \bmod g(v, \mathfrak{p}))$$

der modulo $g(v, \mathfrak{p})$ ganzen Funktionen von v mit Potenzreihen in p als Koeffizienten modulo $g(v, \mathfrak{p})$ betrachtet; es kann somit statt $\bar{K}(u, \mathfrak{p})$ auch dieser Körper $\bar{K}(v, \mathfrak{p})$ weiter untersucht werden.

Wenden wir dieses Ergebnis an auf das soeben bestimmte primitive Element π, welches der Hauptgleichung $v^{\lambda} - p = 0$ genügt, so kann die Untersuchung von $\bar{K}(u, \mathfrak{p})$ ersetzt werden durch diejenige des Kongruenzkörpers:

$$\bar{K}(v, \mathfrak{p}) = \bar{K}(v, \bmod v^{\lambda} - p)$$

der modulo $v^{\lambda} - p$ ganzen Funktionen von v mit Potenzreihen in p als Koeffizienten für den Modul $v^{\lambda} - p$.

Die Elemente $w(v, \mathfrak{p})$ dieses Körpers können nun sämtlich in einer einfachen reduzierten Form dargestellt werden. Es ist nämlich stets:

$$w(v, \mathfrak{p}) \equiv c_0(p) + c_1(p)v + \ldots + c_{\lambda-1}(p)v^{\lambda-1} \pmod{v^{\lambda} - p},$$

da allgemein für jede der Potenzreihen $c_i(p) \equiv c_i(v^{\lambda})$ ist, so ergibt sich:

$$w(v, \mathfrak{p}) \equiv c_r v^r + c_{r+1}v^{r+1} + \ldots \pmod{v^{\lambda} - p}$$

kongruent einer einzigen Potenzreihe in v mit konstanten Koeffizienten, und umgekehrt ist jede solche Potenzreihe einem einzigen Element $w(v, \mathfrak{p})$ modulo $v^{\lambda} - p$ kongruent. Es kann somit an Stelle von $\bar{K}(u, \mathfrak{p})$ der Körper $\bar{K}(\mathfrak{P}(v), \bmod v^{\lambda} - p)$ aller Potenzreihen in v mit konstanten Koeffizienten modulo $v^{\lambda} - p$ untersucht werden.

Es sei nun π eine der λ Wurzeln der Gleichung $v^{\lambda} - p = 0$, also etwa

der Hauptwert von $\sqrt[\lambda]{z-\alpha}$, bzw. $\sqrt[\lambda]{\frac{1}{z}}$, dann bildet der bisher untersuchte Körper $\bar{K}_p(v, \bmod v^\lambda - p)$ aller rationalen Funktionen von v, deren Koeffizienten Potenzreihen *in* p sind, einen Teilbereich des größeren Bereiches

$$\bar{R}_\pi(v, \bmod v^\lambda - p) \tag{18}$$

aller rationalen Funktionen von v, deren Koeffizienten Potenzreihen *in* π sind. Dieser letztere ist ein Ring, denn in dem erweiterten Koeffizientenkörper zerfällt die vorher irreduzible Funktion $v^\lambda - p$ vollständig in die Linearfaktoren:

$$v^\lambda - p = (v-\pi)(v-\omega\pi)\dots(v-\omega^{\lambda-1}\pi) = \prod_{i=0}^{\lambda-1}(v-\pi_i), \tag{19}$$

wenn ω eine primitive λ-te Einheitswurzel ist und allgemein $\pi_i = \omega^i\pi$ für $i = 0, 1, \dots, \lambda-1$ gesetzt wird.

Nach den auf S. 122—124 gegebenen Ausführungen reduziert sich nun die Untersuchung aller Elemente $w = w(v)$ des Körpers $\bar{K}(v, \bmod v^\lambda - p)$ oder, was dasselbe ist, aller Potenzreihen $w = c_r v^r + c_{r+1}v^{r+1} + \dots$ in π modulo $v^\lambda - p$ vollständig auf diejenige derselben Elemente in den λ konjugierten Kongruenzkörpern

$$\bar{K}_i = \bar{K}(v, \bmod v - \pi_i). \tag{20}$$

Sind nämlich, wie a. a. O.,

$$1_0, 1_1, \dots, 1_{\lambda-1}$$

die dort eingeführten Einheitsfunktionen und

$$w_0, w_1, \dots, w_{\lambda-1}$$

die Werte, welche w in jenen Körpern K_i annimmt, d. h. die λ konjugierten Potenzreihen:

$$w_i = c_r\pi_i^r + c_{r+1}\pi_i^{r+1}\dots,$$

so besteht für jedes Element w des Ringes $\bar{R}_\pi(v, \bmod v^\lambda - p)$ die folgende eindeutige Darstellung:

$$w = 1_0 w_0 + 1_1 w_1 + \dots + 1_{\lambda-1}w_{\lambda-1},$$

und nach (8) ergibt sich für die linke Seite der Hauptgleichung $h(t)$ für die die folgende Zerlegung in Linearfaktoren:

$$h(t) = (t-w_0)(t-w_1)\dots(t-w_{\lambda-1}). \tag{21}$$

Jede Hauptgleichung für ein Element $w = \varphi(u, p)$

$$h(t) = t^\lambda - b_1(p)t^{\lambda-1} + \dots \pm b_\lambda(p) = 0,$$

deren linke Seite im Körper $\bar{K}(\mathfrak{p})$ der Potenzreihen von p irreduzibl

ler die Potenz einer irreduziblen Funktion ist, zerfällt also in dem Erweiterungskörper $\bar{K}(p, \pi)$, d. h. im Körper $\bar{K}(\mathfrak{P})$ aller konvergenten oder nichtkonvergenten Potenzreihen von π mit konstanten Koeffizienten in n Produkt von λ konjugierten Linearfaktoren $t - w_i$, und diese Zerlegung ist eindeutig, da der Bereich $\bar{K}(\mathfrak{P})$ eben ein Körper ist.

Wir wenden das soeben gefundene Ergebnis auf alle ν Faktoren $g_i(t, \mathfrak{p})$, in welche die linke Seite der Hauptgleichung $g(t, \mathfrak{p}) = \Pi g_i(t, \mathfrak{p})$ in (8) r ein beliebiges Element w des zugrunde gelegten Körpers $K(u, z)$ zerllt; dann folgt, daß jeder von ihnen in einem Körper $\bar{K}(\mathfrak{P}_i)$ von Potenzihen in konjugierte Linearfaktoren zerfällt, welche nach Potenzen von $= p^{\frac{1}{\lambda_i}}$ fortschreiten. Ist also $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu]$ das kleinste gemeinme Vielfache aller λ_i und $\pi = \sqrt[\lambda]{z - a}$ bzw. $\sqrt[\lambda]{\frac{1}{z}}$, so zerfällt im Körper $(\mathfrak{P})$ aller konvergenten oder nichtkonvergenten Potenzreihen in π die ke Seite jeder Hauptgleichung $g(v, z) = 0$ des Körpers $K(u, z)$ eindeutig n Linearfaktoren.

Jetzt können wir endlich den Nachweis führen, daß diese Zerlegung tsächlich bereits in dem Teilkörper $K(\mathfrak{P})$ aller *konvergenten* Potenzihen in π oder aller Funktionenelemente in π stattfindet, daß also die Wurzeln jeder Hauptgleichung $g(w, z) = 0$ von $K(u, z)$ in der Umbung jeder Stelle $\mathfrak{p}$ der unabhängigen Variablen z durch Elemente anatischer Funktionen dargestellt werden können.

In der Tat sind ja die n Koeffizienten jener Hauptgleichung, d. h. die ementaren symmetrischen Funktionen ihrer n Wurzeln $w_1, \ldots, w_n$ rational z, also *konvergente* Potenzreihen in p und somit auch konvergente eihen in π.

Hieraus kann man wiederum durch Majorantenbildung den Schluß ehen, daß das gleiche auch für diese Wurzeln selbst der Fall sein muß. en Beweis dieses wichtigen Satzes habe ich in dem erwähnten Werke I. L., S. 68—72) vollständig geführt und möchte hier nur auf ihn verisen.

Damit ist die rein arithmetische Grundlage für die Theorie der gebraischen Funktionen einer Veränderlichen vollständig gegeben.

(Eingegangen am 16. Mai 1918.)

Die Verbiegung analytischer Eiflächen.

Von

Heinrich Liebmann in München.

Die Frage nach der Möglichkeit der Verbiegung geschlossener analytischer Flächen durchweg positiven Krümmungsmaßes, kurz gesagt, der analytischen Eiflächen, hat ihre Geschichte, deren Einzelheiten im Enzyklopädieartikel III D. 6 (A. Voß, Abbildung und Abwicklung zweier Flächen auf einander) Nr. 19 und in Blaschkes Buch, Kreis und Kugel, Leipzig 1916, S. 163—164 verzeichnet und daselbst nachzulesen sind.

Um hier die Hauptpunkte hervorzuheben, seien drei Stufen der Entwickelung genannt, die an die Namen Minding (1838), Jellett (1854) und Weyl (1916) knüpfen. Minding behauptete schlechtweg, daß jede Eifläche als geschlossenes Ganzes unverbiegbar sei, Jellett erbrachte einen von Weingarten (1887) als unvollständig gekennzeichneten Beweis dafür, daß sie zum mindesten keine infinitesimale Verbiegung zuläßt — beide Sätze sind erst viel später (1903 und 1899) von mir sichergestellt worden — endlich erbrachte Weyl den Nachweis für den viel allgemeineren Existentialsatz, daß „jede *in abstracto*, d. h. durch die quadratische Differentialform für das Linienelement gegebene konvexe Fläche eine einzige Realisierung im euklidischen Raum zuläßt".

Auf die beiden ersten Fragen soll hier erneut eingegangen werden und zwar wollen wir hier zunächst über eine von Hilbert angeregte Dissertation[1]) berichten, sodann aber soll gezeigt werden, daß der Mindingsche Satz eine einfache Folgerung des Jellettschen ist.

1. Die Dissertation von Rembs, die für den Verfasser dieser Mitteilung den Anlaß gab, sich erneut mit den Verbiegungsfragen zu beschäftigen, bringt einen neuen Satz über die Verbiegung gewisser offener Flächenstücke, auf den wir noch eingehen werden. In der Hauptsache

[1]) E. Rembs, Zur Verbiegung konvexer Flächen mit geschlossenem sphärischem Bild, Bonn 1918.

ber befaßt sie sich mit dem Jellettschen Satz, und da wir ja diesen atz als Stütze für den Mindingschen verwenden wollen, so ist es an-ebracht, auf diesen Teil der Darlegung zunächst einzugehen.

Bei jeder infinitesimalen Verbiegung

$$x_1 = x + \varepsilon\xi, \quad y_1 = y + \varepsilon\eta, \quad z_1 = z + \varepsilon\zeta$$

füllen ξ, η, ζ wegen

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

ie durch Nullsetzen der Koeffizienten von dx^2, dy^2 und $dx\,dy$ (oder lgemeiner von $du^2, dv^2, du\,dv$) in

$$dx\,d\xi + dy\,d\eta + dz\,d\zeta = 0$$

ntstehenden drei partiellen Differentialgleichungen. Das einzelne Flächen-ement erleidet eine infinitesimale Verschiebung mit den Komponenten η, ζ, zugleich aber eine infinitesimale Drehung, deren Komponenten, enn wir x und y als unabhängige Parameter auf der Fläche wählen, durch

$$X = \frac{\partial\zeta}{\partial y}, \quad Y = -\frac{\partial\zeta}{\partial x}, \quad Z = \frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial\eta} = -\frac{\partial\xi}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial x}$$

egeben sind. X, Y, Z sind die rechtwinkligen Koordinaten der „assoziierten läche" Bianchis (1892, vgl. Voß a. a. O. Nr. 32), die damit als „Dreh-ß" der infinitesimalen Verbiegung gedeutet ist. Da nun dieser Drehriß r eine eigentliche infinitesimale Verbiegung, wenn die Fläche positiv ge-rümmt ist, negative Krümmung besitzt und sich nur für den Fall einer infini-simalen Bewegung (X, Y, Z konstant) auf einen Punkt reduziert, so bleibt s einzige Verbiegungsmöglichkeit die Bewegung: Andernfalls würde der rehriß als geschlossene Fläche negativer Krümmung mit einem Wider-ruch behaftet sein. — Dies sind, sehr frei wiedergegeben, die Gedankengänge on Blaschke[1]). Rembs, der die Arbeit von Blaschke anführt, arbeitet it einer wie es scheint nach seiner Meinung von ihm neu eingeführten unktion, in der aber die negative y-Komponente $(-Y)$ der infini-simalen Drehung unschwer zu erkennen ist. Daß Y aber kein Extrem f einer geschlossenen analytischen Eifläche haben kann, ist auf Grund r angeführten Betrachtungen nichts Neues.

Grundsätzlich neu ist dagegen der von Rembs gefundene Satz, daß ch ein offenes einfach zusammenhängendes Flächenstück positiver Krüm-ung, dessen sphärisches Bild die Kugel einfach überdeckt, und dessen and ein ebener Streifen parabolischer Krümmung ist, keine infinitesimale

[1]) Vgl. W. Blaschke, Ein Beweis für die Unverbiegbarkeit geschlossener kon-xer Flächen, Gött. Nachr. 1912. Siehe auch d. Jahresbericht d. D. M. V. 24 (1915), 195—209.

Verbiegung zuläßt. Der Beweis ergibt sich aus dem Umstand, daß diesem ebenen Streifen auf dem Drehriß eine ebene Kurve entspricht — immer vorausgesetzt, daß er sich nicht auf einen Punkt reduziert. Man käme also, wenn Verbiegung möglich wäre, auf ein einfach zusammenhängendes von einer ebenen Kurve begrenztes Flächenstück negativer Krümmung als zugeordneten Drehriß — ein Gebilde, das, genau wie die geschlossene Fläche negativer Krümmung, einen Widerspruch in sich hätte. — Mit dem Gedankengang, den wir im zweiten Abschnitt aufgreifen, ließe sich noch leicht nachweisen, daß die von Rembs untersuchten Flächenstücke keine stetige *endliche* Verbiegung zulassen, bei denen der ebene parabolische Randstreifen eben bleibt.

2. Der Mindingsche Satz als Folge des Jellettschen. Weingarten hat 1887 (vgl. Voß a. a. O. Nr. 32) darauf hingewiesen, daß z jeder endlichen Verbiegung, d. h. zu jedem isometrischen Flächenpaar F_1 F eine infinitesimale Verbiegung der zugeordneten Mittelfläche S gehört. Man kann nämlich die Bedingung der Isometrie von F_1 und F_2, d. h. di Gleichung

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = dx_2^2 + dy_2^2 + dz_2^2$$

auch so schreiben

$$d\bar{x}\,d\bar{\xi} + d\bar{y}\,d\bar{\eta} + d\bar{z}\,d\bar{\zeta} = 0;$$

dabei ist gesetzt

$$(S) \qquad \bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad \bar{z} = \frac{z_1 + z_2}{2},$$

$$\bar{\xi} = x_2 - x_1, \quad \bar{\eta} = y_2 - y_1, \quad \zeta = z_2 - z_1,$$

d. h. aber, daß die Mittelfläche $S(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, der Ort der Mittelpunkte de Vektoren $(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$, die korrespondierende Punkte P_1 P_2 von F_1 und F verbinden, eben diese Vektoren als Zeiger einer infinitesimalen Verbiegung besitzt (Nr. 1).

Wenn nun S durchweg positive Krümmung besitzt, so stellt $\bar{\xi}, \bar{\eta},$ nach dem Jellettschen Satz eine infinitesimale Bewegung dar, d. h. ist dann

$$x_2 - x_1 = A + b\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right) - c\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right),$$

$$y_2 - y_1 = B + c\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - a\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right),$$

$$z_2 - z_1 = C + a\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right) - b\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right),$$

woraus man ablesen kann, daß dann $P_1 \to P_2$ eine endliche Bewegung ist (Vgl. Math. Enz. IV, 3, A. Schönflies, Kinematik, Nr. 5).

Für alle Fälle, in denen S positive Krümmung besitzt, ist also ve möge des Jellettschen Satzes und des angeführten einfachen Zusamme

ngs, den Chasles (1860) zwischen infinitesimalen und endlichen starren ewegungen gefunden hat, der Mindingsche Satz, d. h. die Kongruenz n F_2 mit F_1 bewiesen.

Diese positive Krümmung ist nun freilich schon in ganz einfachen llen nicht anzutreffen; wenn man z. B. eine Kugel die Drehung um 0^0 um einen Durchmesser ausführen läßt, so wird S in diesem Fall rch die Punkte des Durchmessers gegeben.

Indessen, da der Satz Mindings ausdrücklich vom Verbiegungsvorng spricht, also F_2 nach Gestalt und Lage beliebig wenig von F_1 verieden anzunehmen gestattet, so kann, wie wir sehen werden, F_2 eben so wählt werden, daß die positive Krümmung von S keinem Zweifel terliegt.

Um dies nachzuweisen, betrachten wir ein Paar korrespondierender nkte P_1 P_2 und denken uns die endliche Verbiegung zerlegt in vier ementarvorgänge: „Geheftete Verbiegung", d. h. Verbiegung, bei der das ächenelement des Punktes P_1 (auf F_1) festgehalten wird, und drei ehungen, zwei um die x_1- bzw. y_1-Achse, die gleichzeitig konjugiert und thogonal sein mögen, so daß F_1 sich in der Form

$$z_1 = \frac{ax_1^2 + by_1^2}{2} + \dots \qquad (a > 0,\ b > 0)$$

rstellt und eine Drehung um die Normale von F_1. Verschiebung hat inen Einfluß auf S.

Bei diesen vier Elementarvorgängen wird jedesmal eine Mittelfläche tstehen, deren Krümmung sich leicht zu

$$\bar{K} = \frac{2ab + ac_{22} + bc_{11}}{4} \quad (c_{11} > 0,\ c_{22} > 0,\ c_{11}c_{22} - c_{12}^2 = ab)$$

bzw. $\bar{K} = \frac{ab}{\cos^2\alpha}$, $\bar{K} = \frac{ab}{\cos^2\beta}$, $\bar{K} = \frac{2ab\cos\gamma + ab(1+\cos^2\gamma)}{(1+\cos\gamma)^2} = ab$

rechnet. Sind F_1 und F_2 hinreichend wenig nach Gestalt und Lage rschieden, so erzeugt jeder einzelne dieser Schritte ein von $K = ab$ ır wenig verschiedenes Krümmungsmaß $\bar{K}$ für die betreffende Mittelche, also ergeben auch alle drei Schritte, nacheinander ausgeführt, ie Mittelfläche S, deren Krümmungsmaß $\bar{K}$ von K wenig verschieden . Das leuchtet von vornherein ein und bedarf kaum einer rechnerischen stätigung, die übrigens noch eingehender gegeben werden kann. Es ist hl nicht nötig, die in ihrem Bau etwas umständliche Formel hier ederzugeben, die man für $\bar{K}$ erhält, wenn man die vier Schritte verigt. —

Die von Blaschke (*Kreis und Kugel*, S. 164) erhobene Forderung, as schöne Ergebnis von Weyl leichter zugänglich zu machen", ist

damit nicht erfüllt, wohl aber die bescheidenere, den Mindingschen Sat ohne besonderen Gedankenaufwand auf rein kinematischer Grundlage ab zuleiten[1]).

[1]) Weitere Ausführungen auch über andere Verbiegungsfragen erscheinen a anderer Stelle. (München, Ber. 1919). Daselbst wird die in Nr. 1 gegebene Skizz eines Beweises vervollständigt. Auch wird gezeigt, *daß die mit einer noch so kleine Öffnung versehene Kugelfläche verbogen werden kann.* Die „Nichtverbiegbarkeit de Halbkugel", die noch als Gegenstand einer offenen Frage bisher gelten konnte (vg die in der Anmerkung 2 angeführte Antrittsvorlesung Blaschkes, 1915) und di wie ich von kompetenter Seite weiß, noch „viel herumspukte" ist damit endgülti abgetan.

(Eingegangen am 31. Mai 1919.)

Über eine Ungleichung in der Dreiecksgeometrie.

Von

Roland Weitzenböck in Prag.

Ist F der Flächeninhalt eines ebenen Dreiecks mit den Seiten a, b d c, so ist stets

$$\frac{|F|}{a^2+b^2+c^2} \leqq \frac{1}{12}\sqrt{3}$$

d das Gleichheitszeichen gilt nur bei gleichseitigen Dreiecken.

Ich gebe in dieser Arbeit drei einfache Beweise dieses Satzes, eine weiterung auf ebene n-Ecke und den entsprechenden Satz für das traeder. Hieran anschließend werden die Rollen erörtert, die diese tze in der Mechanik der Massenpunkte und bei einem Problem der sgleichsrechnung spielen. Meines Wissens ist obige Ungleichung bisher bemerkt geblieben.

§ 1.

Setzt man

$$s^2 = a^2+b^2+c^2,$$

kann man obige Ungleichung so schreiben

$$s^4 - 48F^2 \geqq 0.$$

Wir denken uns ein rechtwinkliges Koordinatensystem so gelegt, daß Seite $a = P_2P_3$ des Dreieckes $P_1P_2P_3$ auf der x-Achse liegt und n Anfangspunkt O halbiert wird. Die Eckpunkte des Dreieckes haben nn die Koordinaten:

$$P_1(\alpha, \beta), \qquad P_2\left(-\tfrac{a}{2}, 0\right), \qquad P_3\left(\tfrac{a}{2}, 0\right).$$

Es ist hiernach:

$$F^2 = \frac{a^2\beta^2}{4},$$

$$s^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}-\alpha\right)^2 + \beta^2 + \left(\frac{a}{2}+\alpha\right)^2 + \beta^2 = \tfrac{3}{2}a^2 + 2\alpha^2 + 2\beta^2$$

$$= \tfrac{3}{2}a^2 + 2(\alpha^2+\beta^2).$$

Hieraus folgt

$$s^4 - 48F^2 = \tfrac{9}{4}a^4 + 6a^2(\alpha^2+\beta^2) + 4(\alpha^2+\beta^2)^2 - 12a^2\beta^2$$

und dies kann man als Quadratsumme so schreiben:

$$s^4 - 48F^2 = [\tfrac{3}{2}a^2 + 2(\alpha^2-\beta^2)]^2 + 16\alpha^2\beta^2. \tag{3}$$

Hieraus folgt die Richtigkeit obiger Ungleichung. Soll der rechts stehend Ausdruck Null sein, so muß α oder β verschwinden. Ist $\beta = 0$, so gil (3) $a = \alpha = 0$, d. h. P_1, P_2 und P_3 fallen in O zusammen. Ist $\alpha =$ so wird $3a^2 = 4\beta^2$ und dies führt auf das gleichseitige Dreieck.

Ein zweiter Beweis obigen Satzes kann so geführt werden: Die quadratische Form

$$\varphi = x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy$$

der drei reellen Veränderlichen x, y, z ist positiv definit, also $\varphi(x,y,z) \geqq$ Ersetzen wir x, y und z durch a^2, b^2 und c^2, so wird

$$a^4 + b^4 + c^4 - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2 \geqq 0.$$

Mit Hilfe der bekannten Formel für die Fläche F

$$16F^2 = 4(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) - (a^4 + b^4 + c^4) \tag{4}$$

gelangt man dann leicht zu (2).

Die Formel (4) leitet man am einfachsten so her. Es ist

$$F = \tfrac{1}{2}bc\sin\alpha, \qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha;$$

die Elimination von α gibt (4).

Schließlich sei ein dritter Beweis von (2) gegeben. Sind $(x_i, y$ die rechtwinkligen Koordinaten der Eckpunkte P_1, P_2, P_3, so können w diese Punkte in einer komplexen Zahlenebene (z-Ebene) darstellen:

$$z_k = x_k + iy_k \qquad (k = 1, 2, \tag{5}$$

Die Eckpunkte P_k sind dann gegeben durch die Wurzeln z_k d Gleichung

$$z^3 - z^2(z_1 + z_2 + z_3) + z(z_2z_3 + z_3z_1 + z_1z_2) - z_1z_2z_3 = 0. \tag{6}$$

Jetzt setzen wir $x_1 + x_2 + x_3 = \sum x_1$, usf. und haben:

$$s^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 2\sum x_1^2 + 2\sum y_1^2 - 2\sum x_2x_3 - 2\sum y_2y_3. \tag{7}$$

Ferner wird

$$(2F)^2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \sum x_1^2 & \sum x_1y_1 & \sum x_1 \\ \sum x_1y_1 & \sum y_1^2 & \sum y_1 \\ \sum x_1 & \sum y_1 & 3 \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Nun verlegen wir den Punkt $z = 0$ in den Schwerpunkt des Drei-
es, dies gibt $\sum x_1 = \sum y_1 = 0$ und hieraus durch quadrieren:

$$\sum x_1^2 = -2\sum x_2 x_3, \quad \sum y_1^2 = -2\sum y_2 y_3.$$

Mit Hilfe von (9) wird aus (7):

)
$$\tfrac{1}{3}s^2 = \sum x_1^2 + \sum y_1^2$$

(8) gibt:

)
$$\tfrac{4}{3}F^2 = \sum x_1^2 \cdot \sum y_1^2 - \Big(\sum x_1 y_1\Big)^2.$$

Bilden wir nun nach (10) und (11) den Ausdruck $\frac{1}{9}(s^4 - 48F^2)$, so
en wir

$$\tfrac{1}{9}(s^4 - 48F^2) = \Big(\sum x_1^2 + \sum y_1^2\Big)^2 - 4\sum x_1^2 \sum y_1^2 + 4\Big(\sum x_1 y_1\Big)^2 =$$
$$= \Big(\sum x_1^2 - \sum y_1^2\Big)^2 + 4\Big(\sum x_1 y_1\Big)^2 \geqq 0.$$

Hier liest man die Richtigkeit des ersten Teiles unseres Satzes ab.
$s^4 - 48F^2 = 0$, so folgt aus (12):

)
$$\sum x_1^2 - \sum y_1^2 = 0, \quad \sum x_1 y_1 = 0,$$

gehen wir auf (6) zurück. Da $z = 0$ jetzt der Schwerpunkt von
$P_2 P_3$ ist, so haben wir $\sum z_1 = 0$. Wegen (13) ist aber auch
$z_2 z_3 = 0$; (6) nimmt somit für den Fall $s^4 - 48F^2 = 0$ die Gestalt an

)
$$z^3 - z_1 z_2 z_3 = 0,$$

die Punkte z_i sind die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreieckes[1]).

§ 2.

Wir nehmen jetzt $n \geqq 3$ Punkte $P_k(x_k, y_k)$ in einer xy-Ebene an;
müssen nicht notwendig alle verschieden von einander sein. Dann
len wir die Aufgabe: *Es ist eine Gerade G in derselben Ebene so zu
immen, daß die Quadratsumme $\sum p^2$ der Abstände der Punkte P_k
G ein Minimum wird.*

---

[1]) Einer brieflichen Mitteilung des Herrn W. Blaschke entnehme ich folgenden
eis von (2). Für ein n-Eck mit den Seiten a_k ist nach einer bekannten Un-
hung zwischen Umfang und Fläche ebener geschlossener Kurven:

(a)
$$\Big(\sum a_k\Big)^2 \geqq c_k F.$$

mt man hierzu die Ungleichung

(b)
$$n\sum a_k^2 \geqq \Big(\sum a_k\Big)^2,$$

hält man für $n = 3$ die Ungleichung (2) wenn man bedenkt, daß in (b) das
hheitszeichen nur bei $a_k = a_l$ gilt (wodurch sich dann c_n bestimmen läßt).

Es sei G durch die Gleichung festgelegt

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - \varepsilon = 0, \tag{15}$$

dann ist

$$\Pi = \sum p^2 = \sum_k (x_k\cos\varphi + y_k\sin\varphi - \varepsilon)^2 \tag{16}$$

zu einem Minimum zu machen.

Wir legen den Anfangspunkt in den Schwerpunkt des n-Eck $P_1, \ldots, P_n$, so daß $\sum x = \sum y = 0$ ist. Die Gleichungen $\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} =$ $\frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon} = 0$ geben dann $\varepsilon = 0$ und

$$\operatorname{tang} 2\varphi = \frac{2\sum xy}{\sum x^2 - \sum y^2}, \tag{17}$$

oder auch

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{1}{2\sum xy}\left[\sum y^2 - \sum x^2 \pm \sqrt{\left(\sum y^2 - \sum x^2\right)^2 + 4\left(\sum xy\right.}\right. \tag{18}$$

Wir erhalten so zwei durch den Schwerpunkt gehende Geraden und G_2.

Es ist dann

$$\operatorname{tang}\varphi_1 + \operatorname{tang}\varphi_2 = \frac{\sum y^2 - \sum x^2}{\sum xy}, \tag{19}$$

$$\operatorname{tang}\varphi_1 \cdot \operatorname{tang}\varphi_2 = -1, \tag{20}$$

d. h. G_1 ist senkrecht zu G_2. Statt (16) kommt jetzt

$$\Pi_i = \sum y^2 + \sum xy \cdot \operatorname{cotg}\varphi_i \qquad (i = 1, \tag{21}$$

Bezeichnen wir die Strecke $\overline{P_i P_k}$ mit s_{ik} und die Dreiecksfläc $O P_i P_k$ mit f_{ik}, so ist

$$s^2 = \sum_{ik} s_{ik}^2 = n\left(\sum x^2 + \sum y^2\right), \tag{22}$$

$$4f^2 = 4\sum_{ik} f_{ik}^2 = \sum x^2 \cdot \sum y^2 - \left(\sum xy\right)^2. \tag{23}$$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen in (18) ist $\geqq 0$; drück wir ihn durch die Invarianten s^2 und f^2 aus, so ergibt sich

$$s^4 - 16n^2 f^2 \geqq 0. \tag{24}$$

Beim Dreieck ist $f_{ik} = \frac{1}{3}F$ und (24) gibt dann (2).

Bei Verwendung von s^2 und f^2 sind dann die Ausdrücke (21) Wurzeln der Gleichung

$$\Pi^2 - \Pi\frac{s^2}{n} + 4f^2 = 0. \tag{25}$$

Eine Wurzel entspricht dem Maximum und die andere dem Minimum $\sum p^2$. Wenn $\Pi_1 = \Pi_2$ wird, so haben wir

$$\sum x^2 = \sum y^2, \qquad \sum xy = 0 \qquad \left(\sum x = 0, \sum y = 0\right).$$

diesem Falle und nur in diesem ist jede Gerade durch den Schwerkt eine Lösung obiger Aufgabe. Wir können die Punkte P_k wieder in § 1 durch komplexe Zahlen $z_k = x_k + i y_k$ darstellen und schließen n so wie am Ende des § 1, daß bei Gültigkeit von (26) die z_k Wurzeln r Gleichung von folgender Gestalt sind:

$$z^n + a_3 z^{n-3} + a_4 z^{n-4} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0.$$

regulären n-Ecken $(a_3 = a_4 = \ldots = a_{n-1} = 0)$ ist also (26) immer llt.

Wir fassen das Bisherige in einem Satze zusammen:

Es seien n Punkte P_k einer Ebene gegeben, O sei ihr Schwerpunkt, die Summe aller $s_{ik}^2 = \overline{P_i P_k}^2$ und f^2 die Quadrat-Summe aller Dreiinhalte $f_{ik} = (O P_i P_k)$: $f^2 = \sum f_{ik}^2$. Dann ist stets

$$s^4 - 16 n^2 f^2 \geqq 0$$

das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn die n Punkte x_k, y_k) durch die Wurzeln $z_k = x_k + i y_k$ einer Gleichung

$$z^n + a_3 z^{n-3} + a_4 z^{n-4} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

gestellt werden können.

Wenn wir die Punkte P_k als *Massenpunkte* mit der Masse 1 aufen, so kommt obige Aufgabe auf die Bestimmung der *Hauptträgheitsen* G_1 und G_2 durch den Schwerpunkt (Zentralachsen) des Systems P_k hinaus. $\sum x^2$ und $\sum y^2$ sind dann die Trägheitsmomente beich der y- und x-Achse; $\sum xy$ ist das Deviationsmoment. *Die leichung* (24) *ist dann der Ausdruck dafür daß die Hauptträgheitsn stets reell sind.*

§ 3.

Wir nehmen jetzt *im Raume n* Punkte $P_k (n \geqq 4)$ mit den rechtligen Koordinaten x_k, y_k, z_k und suchen eine Ebene E, so daß $\sum p^2$ Extremum wird, wenn p_k der Abstand $E P_k$ ist. Es sei

$$x \cdot \alpha + y \cdot \beta + z \cdot \gamma - \varepsilon = 0, \qquad (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1)$$

gesuchte Ebene. Dann ist

$$\Pi = \sum p^2 = \sum_k (x_k \alpha + y_k \beta + z_k \gamma - \varepsilon)^2$$

einem Extremum zu machen mit der Nebenbedingung

$$N = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1 = 0.$$

Wir bilden in üblicher Weise $\Pi + \lambda N$ und setzen die Ableitunge dieses Ausdrucks nach α, β, γ und ε gleich Null. Dies gibt vor alle wieder $\varepsilon = 0$, wenn wir den Schwerpunkt zum Anfangspunkt $(0, 0, 0$ machen. Weiter erhalten wir für γ die Gleichung

$$30) \qquad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \sum x^2 + \lambda & \sum xy & \sum xz \\ \sum yx & \sum y^2 + \lambda & \sum yz \\ \sum zx & \sum zy & \sum z^2 + \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Nun sei $n = 4$ und J der Inhalt des Tetraeders $P_1P_2P_3P_4$; ferne sei $s_{ik} = \overline{P_iP_k}$, $f_{ik} =$ Dreiecksfläche (OP_iP_k). Wir setzen

$$(31) \qquad f^2 = \sum_{ik} f_{ik}^2, \qquad s^2 = \sum_{ik} s_{ik}^2.$$

Dann kann (30) so geschrieben werden:

$$(32) \qquad \lambda^3 + \lambda^2 \cdot \frac{s^2}{4} + \lambda \cdot 4f^2 + 9J^2 = 0.$$

Bekanntlich hat (30) drei reelle Wurzeln. Nach (32) erhält m als Bedingung hierfür:

$$(33) \qquad \frac{1}{4}\left(9J^2 - \frac{1}{3}s^2f^2 + \frac{1}{27 \cdot 32}s^6\right)^2 + \frac{1}{16^3 \cdot 27^3}\left(12 \cdot 16f^2 - s^4\right)^3 \leqq 0.$$

Hieraus folgt

$$(34) \qquad 192f^2 - s^4 \leqq 0,$$

eine Beziehung, die für jedes Tetraeder gilt. Beim gleichseitigen Tetraed und nur bei diesem, gilt das Gleichheitszeichen.

Letzteres kann man etwa so zeigen. Gilt in (34) das Gleichhei zeichen, so gibt (34) und (33):

$$192f^2 = s^4, \qquad 9J^2 = \frac{s^6}{9 \cdot 12 \cdot 16}$$

Die λ-Gleichung (32) gibt dann $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{s^2}{12}$.

Jetzt legen wir das Achsenkreuz $(S - xyz)$ so, daß die Deviatio momente $\sum yz$, $\sum zx$ und $\sum xy$ verschwinden und überdies die z-Ach durch P_4 geht. Dann wird $\sum y^2 = \sum x^2$, und daher bilden die P jektionen P_1', P_2', P_3' von P_1, P_2, P_3 auf $z = 0$ ein gleichseitiges Dreie

n kann somit setzen

$$\begin{cases} P_1 \ldots x_1 = -\frac{a}{2}, & y_1 = -\frac{a}{6}\sqrt{3}, & z_1 = z_1, \\ P_2 \ldots x_2 = +\frac{a}{2}, & y_2 = -\frac{a}{6}\sqrt{3}, & z_2 = z_2, \\ P_3 \ldots x_3 = 0, & y_3 = +\frac{a}{3}\sqrt{3}, & z_3 = z_3, \\ P_4 \ldots x_4 = 0, & y_4 = 0, & z_4 = z_4, \end{cases}$$

l erhält dann leicht $z_1 = z_2 = z_3 = \frac{a}{2\sqrt{6}}$ und $z_4 = \frac{3a}{2\sqrt{6}}$, also ein regu-es Tetraeder.

Wir führen noch eine Ungleichung an, die sich für ein Tetraeder (2) ergibt. Wendet man nämlich (2) in der Gestalt

$$|F| \leqq \frac{1}{12}\sqrt{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

jede Seitenfläche an und addiert, so wird — wenn O die Oberfläche Tetraeders ist —:

a) $$O \leqq \frac{1}{6}\sqrt{3}\, s^2.$$

Kombiniert man diese Ungleichung mit der für konvexe Körper enden

$$O \geqq c J^{\frac{2}{3}}$$

beachtet, daß in (34a) das Gleichheitszeichen nur beim regulären raeder gilt, so erhält man

b) $$J^2 \leqq \frac{1}{2^6 \cdot 3^5}\, s^6.$$

Nehmen wir die P_k wieder als Massenpunkte, so erhalten wir ent-chend den drei Wurzeln von (30) drei Ebenen E_i; deren Schnittlinien l die Hauptträgheitsachsen des Systems der P_k. Es sei noch kurz eführt, wie man diese Achsen selbst als Lösung der folgenden Aufgabe ilt: *Es ist eine Gerade G im Raume so zu bestimmen, daß $\sum p^2$ Minimum wird, wenn p_k der Abstand GP_k ist.*

Es seien

$_2 = p'_{34}$, $p_{13} = p'_{42}$, $p_{14} = p'_{23}$, $p_{34} = p'_{12}$, $p_{42} = p'_{13}$, $p_{23} = p'_{14}$ homogenen Koordinaten der gesuchten Geraden G. Es ist dann

) $$A = p'_{23}p'_{14} + p'_{31}p'_{24} + p'_{12}p'_{34} = 0.$$

Wir normieren jetzt die p'_{ik} so, daß

$$B = p'^2_{23} + p'^2_{31} + p'^2_{12} - 1 = 0 \tag{36}$$

wird. Das Quadrat p^2 des Abstandes GP ist dann gegeben durch:

$$\begin{aligned} p^2 = (p'_{12}y + p'_{13}z + p'_{14})^2 + (p'_{21}x + p'_{23}z + p'_{24})^2 \\ + (p'_{31}x + p'_{32}y + p'_{34})^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2. \end{aligned} \tag{37}$$

Jetzt ist

$$\Pi = \sum p_k^2 = \sum (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)$$

zu einem Minimum zu machen mit den Nebenbedingungen $A = 0$ und $B = 0$.

Die sechs Gleichungen

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p'_{ik}} + \mu \frac{\partial A}{\partial p'_{ik}} + \lambda \frac{\partial B}{\partial p'_{ik}} = 0$$

geben das System:

$$\begin{aligned} \sum (u_1 y - u_2 x) + \lambda p'_{12} + \mu p'_{34} &= 0, \\ \sum (u_3 x - u_1 z) + \lambda p'_{31} + \mu p'_{24} &= 0, \\ \sum (u_2 z - u_3 y) + \lambda p'_{23} + \mu p'_{14} &= 0, \\ \sum u_1 \qquad\qquad + \mu p'_{23} &= 0, \\ \sum u_2 \qquad\qquad + \mu p'_{31} &= 0, \\ \sum u_3 \qquad\qquad + \mu p'_{12} &= 0. \end{aligned} \tag{38}$$

Die letzten drei dieser Gleichungen geben wegen $\sum x = \sum y = \sum z =$ für μ Null, und demzufolge haben wir aus den ersten drei Gleichunge

$$\begin{vmatrix} \sum z^2 - \sum y^2 + \lambda & -\sum xy & -\sum xz \\ -\sum yx & \sum x^2 - \sum z^2 + \lambda & -\sum yz \\ -\sum zx & -\sum zy & \sum y^2 - \sum x^2 + \lambda \end{vmatrix} = \tag{39}$$

Dies führt auf eine Gleichung für λ, deren Wurzeln gleich sind d Differenzen je zweier Wurzeln von (30). Diesen Zusammenhang erken man am schnellsten, wenn man die Hauptträgheitsachsen zu Koordinate achsen macht, wobei dann die Deviationsmomente $\sum yz$, $\sum zx$ u $\sum xy$ verschwinden.

§ 4.

Die in § 1 und § 2 behandelte Aufgabe der ebenen Elementargeomet spielt in der *Ausgleichsrechnung* eine Rolle. Wir wollen dies jetzt ku erörtern.

Es seien auf einem Plan die *rechtwinkligen Koordinaten* x_k, y_k von Punkten P_k gemessen. Man wisse von vornherein, daß diese n Punkte er Geraden G angehören. Die Messungsgrößen x_k, y_k werden im allneinen nicht alle diejenigen Bedingungsgleichungen B erfüllen, die ischen Punkten einer Geraden bestehen; wir sehen hierbei von groben l von konstanten Fehlern ab. Man kann nun, um B zu erfüllen, die Punkte ausgleichen, d. h. wir ersetzen $P_k(x_k, y_k)$ durch $P'_k(x'_k, y'_k)$, so 3 alle P'_k auf G liegen und die Quadratsumme der Verbesserungen $-x_k$, $y'_k - y_k$, also der Ausdruck

$$\Pi = \sum (x'_k - x_k)^2 + (y'_k - y_k)^2 = \sum p^2$$

Minimum wird. Hierbei setzen wir die Messungsgrößen x_k und y_k gleicher Güte voraus (x_k und y_k sollen dasselbe „Gewicht" haben). (40) zeigt dann, daß die gesuchte „*Ausgleichsgerade*" G so liegt, $\sum p_k^2$ möglichst klein ist, wobei p_k der Abstand GP_k ist, daß G mit der in § 2 betrachteten Geraden identisch ist. Die dort anührten Formeln und Sätze gelten also hier auch.

Es sei noch hervorgehoben, daß es für die Gültigkeit von (40) entlich ist, daß die Punkte P_k durch rechtwinklige Koordinaten geen sind. Würden die P_k beispielsweise in Polarkoordinaten (ϱ_k, φ_k) eben sein, so würde man eine ganz andere Gerade als Ausgleichsgerade alten, da man dann gemessene *Winkel* und *Strecken* auszugleichen hätte.

Nach Gleichung (40) ist die Figur bestehend aus den n Punkten P_k der zugehörigen Ausgleichsgeraden G gegenüber Bewegungen invariant, . man erhält G unabhängig von der Lage des Achsenkreuzes Oxy. rauf dürfte zuerst G. Kowalewski [1]) hingewiesen haben.

Das Problem der Ausgleichsgeraden für n Punkte einer Ebene wurde zwei neueren Arbeiten von R. Schumann [2]) und von J. Adamczik [3]) ganz eigenartiger Weise behandelt. Beide Autoren versuchen die Aufe zu lösen, indem sie den normalen Weg einschlagen, der von den lergleichungen zu den Normalgleichungen führt. Dieser Weg ist hier ıt gangbar. So kommt es, daß R. Schumann unter den hier gechten Voraussetzungen der Gewichtsgleichheit von x_k und y_k vier veredene Ausgleichsgeraden erhält (Ansätze A, B, C und D). Die An-

[1]) In einem Vortrag im Mathematischen Kränzchen in Prag, März 1919.

[2]) R. Schumann, Bestimmung einer Geraden durch Ausgleichung der bchteten Koordinaten ihrer Punkte nach der Methode der kleinsten Quadrate, ıer Berichte, IIa, 125 (1916).

[3]) J. Adamczik, Richtungs- und Punktkoordinatenausgleichung einer Geraden, ıer Berichte, IIa, 127 (1918).

sätze A und B sind Spezialfälle einer Ausgleichungsaufgabe mit de Nebenbedingung: die Punkte P_k sind so auszugleichen, daß sie alle paralle einer *gegebenen* Richtung (bei A in der Richtung der y-Achse, bei B i der Richtung der x-Achse) verschoben werden). Der Ansatz C ist de hier behandelte; er allein kommt in Betracht, wenn eine Ausgleichun für die Praxis überhaupt einen Sinn haben soll. Ganz zu verwerfen is Ansatz D, bei dem es z. B. leicht passieren kann, daß die Ausgleich gerade G mit der unendlich fernen Geraden identisch wird.

Prag, 24. März 1919.

(Eingegangen am 9. Mai 1919.

Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn Carleman

Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

In der obengenannten interessanten Abhandlung [Acta Mathematica, . XLI (1918), S. 377—384] löst Herr Carleman vor allem die beiden oblеme:

1. *Eine reelle stetige Funktion $F(x)$ zu finden, deren Fourier-effizienten den Konvergenzexponenten 2 haben.* (Bekanntlich ist er ts $\leqq 2$.)

2. *Es bezeichne G_n die obere Grenze von $\sum_{\nu=0}^{n} |a_\nu|$ bei allen im Kreise < 1 regulären Funktionen $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$, die dort absolut < 1 sind.*

soll

$$G_n + o\left(\frac{\sqrt{n}}{\log n}\right)$$

viesen werden, woraus wegen der bekannten Abschätzung

$$G_n = O(\sqrt{n})$$

fortiori

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log G_n}{\log n} = \frac{1}{2}$$

gt.

Nach dem Studium seiner Arbeit fällt mir folgendes ein:

I. Er beweist (1), indem er für jede Primzahl $p \equiv 1 \pmod 4$ ein zielles Polynom $f_p(z) = \sum_{\nu=1}^{p-1} b_\nu^{(p)} z^\nu$ bildet, für das im Einheitskreis $(z)| < 1$ gilt und außerdem

$$\sum_{\nu=1}^{p-1} \left| b_\nu^{(p)} \right| = \frac{1}{2C \log p} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sqrt{p}$$

(C absolute Konstante). Aus (4) zieht er zwar die Folgerung (3); unterläßt aber, die schärfere Relation

(5) $$\lim_{n=\infty} \frac{\log G_n}{\log n} = \frac{1}{2}$$

aus (4) herzuleiten. Dies geht leicht folgendermaßen. Wenn p_n fü $n \geqq 5$ die größte Primzahl $4y+1 \leqq n$ ist, so ist[1]) bei gegebenem $\delta >$ für $n > n_0(\delta)$

$$p_n > n^{1-\delta},$$

also

$$f_{p_n}(z) = \sum_{\nu=1}^{p_n-1} b_\nu^{(p_n)} z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

im Einheitskreis absolut <1 und so beschaffen, daß

$$\sum_{\nu=0}^{n} |a_\nu| = \sum_{\nu=1}^{p_n-1} \left| b_\nu^{(p_n)} \right| = \frac{1}{2C \log p_n} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right) \sqrt{p_n} > \frac{1}{2C \log n} \left(1 - \frac{1}{n^{1-\delta}}\right) n^{\frac{1}{2}-}$$

ist. Bei jedem positiven $\delta < 1$ ist die rechte Seite $\sim \frac{1}{2C \log n} n^{\frac{1}{2} - \frac{\delta}{2}}$; als ist für $n > n_1(\delta)$

$$G_n \geqq \sum_{\nu=0}^{n} |a_\nu| > n^{\frac{1}{2}-\delta};$$

bei jedem $\delta > 0$ ist somit

(6) $$\lim_{n=\infty} \frac{G_n}{n^{\frac{1}{2}-\delta}} > 0,$$

also

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log G_n}{\log n} \geqq \frac{1}{2} - \delta.$$

Folglich ist

(7) $$\lim_{n=\infty} \frac{\log G_n}{\log n} \geqq \frac{1}{2},$$

also in Verbindung mit (2) die Behauptung (5) bewiesen.

Benutzt man die schärfere[2]) Primzahleigenschaft $\lim_{n=\infty} \frac{p_n}{n} > 0$, als $p_n > cn$ mit absolut konstantem $c > 0$ für alle $n \geqq 5$, so folgt

$$G_n \geqq \frac{1}{2C \log p_n} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right) \sqrt{p_n} > \frac{1}{2C \log n} \left(1 - \frac{1}{cn}\right) \sqrt{cn} \sim \frac{\sqrt{c}\sqrt{n}}{2C \log n},$$

also

(8) $$\lim_{n=\infty} G_n : \frac{\sqrt{n}}{\log n} > 0,$$

während (1) nur

$$\overline{\lim_{n=\infty}} G_n : \frac{\sqrt{n}}{\log n} > 0$$

besagte.

---

[1]) Ich verwende weit weniger als den (elementar beweisbaren) Satz, daß d Quotient zweier konsekutiver Primzahlen $4y+1$ beschränkt ist; und man weiß sogar, daß er gegen 1 strebt, und noch mehr.

[2]) Bekanntlich ist sogar $\lim_{n=\infty} \frac{p_n}{n} = 1$; vgl. Anm. 1.

II. Aus älteren, aber tieferen Untersuchungen der Herren Hardy d Littlewood ergibt sich ohne weiteres nicht nur (5), sondern sogar (8) verschärfende Relation

$$\lim_{n=\infty} \frac{G_n}{\sqrt{n}} > 0$$

Nebenresultat, so daß Herrn Carlemans Problem 2 schon als gelöst zusehen war. Es war also nicht nur bekannt, daß die Größenordnung G_n „nicht erheblich kleiner als $\sqrt{n}$ sein kann“ (Carleman, S. 383, 1), sondern daß sie genau $\sqrt{n}$ ist. Die Herren Hardy und Littlewood ben nämlich in ihrer Arbeit *Some Problems of Diophantine Approxiation* [Acta Mathematica, Bd. XXXVII (1914), S. 155—239] bewiesen gl. S. 220): *Es sei $\xi = \sqrt{2}$ oder irgendeine andere feste reelle algebraische hl zweiten Grades oder eine sonstige feste reelle Irrationalzahl mit beränkten Kettenbruchnennern. Dann gibt es ein nur von ξ abhängiges, n und z freies $A = A(\xi)$, so daß für alle $n \geqq 1$ und alle z auf n Einheitskreis $|z| = 1$*

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} e^{\nu^2 \pi \xi i} z^\nu \right| < A\sqrt{n}$$

Die Funktion

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{e^{\nu^2 \pi \xi i}}{A\sqrt{n}} z^\nu$$

ügt also für $|z| < 1$ der Ungleichung $|f(z)| < 1$; daher ist

$$G_n \geqq \sum_{\nu=1}^{n} \left| \frac{e^{\nu^2 \pi \xi i}}{A\sqrt{n}} \right| = \frac{1}{A}\sqrt{n},$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{G_n}{\sqrt{n}} \geqq \frac{1}{A} > 0.$$

III. Das weniger scharfe Ergebnis (6), welches immerhin (7), also gen (2)) (5) und (3) enthält, ergibt sich auch schon aus einem zu leren Zwecken betrachteten Beispiel der Herren Fabry (*Ordre des points guliers de la série de Taylor* [Acta Mathematica, Bd. XXXVI (1913), 9—104], S. 103) und Hardy (*A theorem concerning Taylor's series* e quarterly Journal of pure and applied Mathematics, Bd. XLIV (1913), 47—160], S. 157). Hiernach ist nämlich bei jedem festen $\delta > 0$ die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\nu^{1-\delta_i}}}{\nu^{\frac{1}{2}+\delta}} z^\nu$$

dem Kreise $|z| = 1$ gleichmäßig konvergent, also a fortiori für $|z| < 1$ chränkt. Bei passender Wahl eines $B = B(\delta) > 0$ ist daher dort

$$\left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\nu^{1-\delta_i}}}{B\nu^{\frac{1}{2}+\delta}} z^\nu \right| < 1.$$

Für jedes $n \geqq 1$ ergibt sich also

$$G_n \geqq \sum_{\nu=1}^{n} \left| \frac{e^{\nu^{1-\delta_i}}}{B\nu^{\frac{1}{2}+\delta}} \right| = \frac{1}{B} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu^{\frac{1}{2}+\delta}},$$

d. h. die Relation (6).

IV. Herr Carleman benutzt für die Lösung seiner beiden Problem 1 und 2 immerhin einige neuere Hilfsmittel über trigonometrische Reihe bzw. Polynome, nämlich auf S. 378 den S. Bernsteinschen Beweis vo $|f_p(x)| < 1$, der (in Herrn Bernsteins Arbeit) sich auf eine Eigenschaf einer neueren trigonometrischen Interpolationsformel von Herrn Jackso stützt; beim Problem 2 benutzt Herr Carleman überdies (S. 383) eine neueren Satz des Herrn Fekete über konjugierte Fourierreihen.

All dies ist entbehrlich, wenn man sein trigonometrisches Polynor beim Problem 1 und seine ganze rationale Funktion von z beim Problem abändert; ich werde — in einer Fassung, die weder Kenntnis der Sätz der Herren Jackson, Bernstein und Fekete noch der Carlemansche Arbeit verlangt und von den tieferen, unter II und III genannten Unte suchungen der Herren Fabry, Hardy und Littlewood keinen Gebrauc macht — neue, ganz direkte Beweisanordnungen für die beiden Carleman schen Ergebnisse mitteilen.

Hilfssatz 1: *Es sei* $k \geqq 3$, $|z| = 1$. *Es durchlaufe* ξ *in* Σ' d *k-ten Einheitswurzeln mit Ausnahme der beiden, zwischen denen* liegt. (*Ist* z *selbst k-te Einheitswurzel, so fehle* z *und irgendeine d beiden benachbarten.*) *Dann ist*

$$\sum_{\xi}{}' \frac{1}{|z-\xi|} < k \log k.$$

Beweis: Der Durchmesser des Einheitskreises, welcher durch z g legt ist, trennt alle in Σ' auftretenden ξ in zwei Klassen. (Endigt in einem ξ, so ist es unerheblich, zu welcher Klasse dieser Punkt gezäh wird.) Auf jedem der beiden Halbkreise ist der Bogen zwischen z un dem nächsten, übernächsten, ..., allgemein dem an ν-ter Stelle folge den ξ mindestens $\frac{2\pi}{k}, \frac{4\pi}{k}, \ldots, \frac{2\nu\pi}{k}$; da der Bogen $\leqq \pi$ ist, ist die z gehörige Sehne das ν-te Mal $\geqq 2 \sin \frac{\nu\pi}{k}$. Wegen $\frac{2\nu\pi}{k} \leqq \pi$ ist $\nu \leqq \left[\frac{k}{2}\right]$. Daher ist

$$\sum_{\xi}{}' \frac{1}{|z-\xi|} \leqq 2 \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{1}{2 \sin \frac{\nu\pi}{k}} \leqq 2 \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{1}{2\frac{2}{\pi}\frac{\nu\pi}{k}} < \frac{k}{2} \sum_{\nu=1}^{k} \frac{1}{\nu} < \frac{k}{2}(1+\log k) < k \log k$$

Hilfssatz 2: *Es sei* $k \geqq 3$. *Jedes Polynom* $f(z)$ *von höch stens* $(k-1)$*-tem Grade, das für alle k-ten Einheitswurzeln absol*

M ist $(M > 0)$, genügt für $|z| = 1$, also für $|z| \leqq 1$, der Un-
eichung

$$|f(z)| < 4M \log k.$$

Beweis: Nach der Lagrangeschen Interpolationsformel ist, wenn ξ le k-ten Einheitswurzeln durchläuft und $z^k - 1 = g(z)$ gesetzt wird,

$$f(z) = \sum_{\xi} \frac{f(\xi)}{g'(\xi)} \frac{g(z)}{z-\xi},$$

so

$$|f(z)| \leqq \sum_{\xi} \frac{M}{k} \left|\frac{g(z)}{z-\xi}\right| = \frac{M}{k} \sum_{\xi} \left|\frac{g(z)}{z-\xi}\right|.$$

ir $|z| = 1$ ist einerseits

$$\left|\frac{g(z)}{z-\xi}\right| = |z^{k-1} + \xi z^{k-2} + \ldots + \xi^{k-1}| \leqq k,$$

dererseits, sofern $z \neq \xi$ ist,

$$\left|\frac{g(z)}{z-\xi}\right| \leqq \frac{2}{|z-\xi|}.$$

aher ist nach Hilfssatz 1

$$|f(z)| \leqq \frac{M}{k}\left(2k + 2\sum_{\xi}{}' \frac{1}{|z-\xi|}\right) < \frac{M}{k}(2k + 2k \log k)$$

$$= 2M(1 + \log k) < 4M \log k,$$

e. d.

Ich operiere einstweilen mit einem beliebigen $k > 1$, das $\not\equiv 2 \pmod 4$ (zu dem es also mindestens einen eigentlichen Nicht-Hauptcharakter $\chi(n)$ bt), obgleich für die beiden Anwendungen 1 und 2 der Spezialfall $= p \equiv 1 \pmod 4$ genügt. Ich verstehe unter $\chi(n)$ irgendeinen eigent-hen Nicht-Hauptcharakter mod k. Bekanntlich[3]) ist,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{k-1} \chi(n) z^n$$

setzt, für jede k-te Einheitswurzel ξ

$$|f(\xi)| \leqq \sqrt{k};$$

ch Hilfssatz 2 ist daher für $|z| < 1$

$$|f(z)| < 4\sqrt{k} \log k.$$

Zur Lösung des Problems 1[4]): Das Carlemansche $f_p(x)$ der 378—380 läßt sich also durch die andere Funktion

---

[3]) Vgl. S. 486 und 492 meines *Handbuchs der Lehre von der Verteilung der Prim-hlen* [Leipzig und Berlin (Teubner), 1909].

[4]) Eine independent dargestellte Lösung von 1 folgt nachher unter V.

(9) $f_p(x) = \frac{1}{4\sqrt{p}\log p}\sum_{n=1}^{p-1}\chi(n)\cos nx, \quad p \equiv \pm 1 \pmod 4, \quad \chi(n) = \left(\frac{n}{p}\right)$

ersetzen, mit dem Ergebnis: Es ist unendlich oft

$$|A_1| + \ldots + |A_m| > \frac{\sqrt{m}}{8\log^3 m};$$

hieraus folgt genau so, wie Herr Carleman seine Formel (6) verwende daß $\sum_{n=1}^{\infty}|A_n|^{2-\delta}$ für kein $\delta > 0$ konvergiert.

Lösung des Problems 2: Die ganze rationale Funktion der S. 38 läßt sich durch

$$f_k(z) = \frac{1}{4\sqrt{k}\log k}\sum_{n=1}^{k-1}\chi(n)z^n$$

ersetzen (mit der Spezialisierung $k = p$ warte ich noch); dann is $f_k(z)| < 1$ für $|z| < 1$, also für $k > k_0(\delta)$ (sofern $k \not\equiv 2 \pmod 4$ ist

$$G_k \geqq G_{k-1} \geqq \frac{1}{4\sqrt{k}\log k}\sum_{n=1}^{k-1}|\chi(n)| = \frac{\varphi(k)}{4\sqrt{k}\log k} > k^{\frac{1}{2}-\delta}\ ^{5}).$$

Dies gilt insbesondere für jedes ungerade $k > k_0(\delta)$; für jedes gerad $k > k_0(\delta) - 1$ ist also

$$G_k > (k+1)^{\frac{1}{2}-\delta}.$$

Für alle $k > k_1(\delta)$ ist also

$$G_k > k^{\frac{1}{2}-\delta},$$

also (6), (7) und (wegen (2)) (5) und (3) bewiesen.

Man kann aber auch den Satz über $\varphi(k)$ vermeiden, indem ma gleich $k = p$ setzt und $\varphi(p) = p - 1$ beachtet; dann entsteht

$$G_{p-1} \geqq \frac{p-1}{4\sqrt{p}\log p},$$

also (wie oben unter I) (8) und a fortiori (1), (5) und (3).

V. Für das Problem 1 läßt sich, mag man Herrn Carleman $f_p(x) = \sum_{n=1}^{p-1} a_n^{(p)}\cos nx$ bzw. meine entsprechende Funktion (9) $\left(\text{d. h. } a_n^{(p)} = \frac{\chi(n)}{4\sqrt{p}\log p}\right)$ nehmen, die Konstruktion seines $F(x)$ dahin vereinfacher daß nachher in (11) jedes $g_{p_\nu}(x)$ ganz andere n enthält und dadurc Herrn Carlemans Ungleichung (5) entbehrlich wird.

---

[5]) Vgl. den nicht voll zur Anwendung gelangenden Satz über $\varphi(k)$ in § 5 meines *Handbuchs*.

Das trigonometrische Polynom

$$(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{p-1} a_n^{(p)} \cos(2p-n)x + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{p-1} a_n^{(p)} \cos(2p+n)x = \sum_{n=p+1}^{3p-1} c_n^{(p)} \cos nx$$

nügt wegen

$$g_p(x) = \cos 2px f_p(x)$$

Bedingung

$$|g_p(x)| < 1,$$

d es ist

$$q_p = \sum_{n=p+1}^{3p-1} |c_n^{(p)}| = \frac{p-1}{\sqrt{p}} \text{ bzw. } \frac{p-1}{4\sqrt{p}\log p}.$$

n setze ich

$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} g_{p_\nu}(x),$$

$p_2 > 3p_1$, $p_3 > 3p_2$, ... ist und die Primzahlen $p_\nu \equiv 1 \pmod 4$ en; dann ist $p_\nu > 3^\nu$, $\log p_\nu > \nu$. Es ist $F(x)$ stetig, weil die rechte te von (11) gleichmäßig konvergiert. Von den Fourierkoeffizienten schwinden aus dem gleichen Grunde die $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x) \sin nx\,dx$, und es ist,

$\int_0^{\pi} F(x) \cos nx\,dx = A_n$ gesetzt, für $p_\nu + 1 \leqq n \leqq 3p_\nu - 1$

$$A_n = \frac{1}{\nu^2} c_n^{(p_\nu)}.$$

her ist

$$\sum_{n=0}^{3p_\nu} |A_n| \geqq \sum_{n=p_\nu+1}^{3p_\nu-1} |A_n| = \frac{1}{\nu^2} q_{p_\nu} > \frac{1}{\log^2 p_\nu} q_{p_\nu},$$

nach (10) für $\nu > \nu_0(\delta)$

$$\sum_{n=0}^{3p_\nu} |A_n| > (3p_\nu)^{\frac{1}{2}-\delta}.$$

glich ist für jedes $\delta > 0$ unendlich oft

$$\sum_{n=0}^{m} |A_n| > m^{\frac{1}{2}-\delta},$$

aus in bekannter Weise folgt, daß $\sum_{n=0}^{\infty} |A_n|^{2-\delta}$ für kein $\delta > 0$ konvergiert.

Göttingen, den 11. Mai 1919.

(Eingegangen am 13. Mai 1919.)

Ein neuer Beweis des Fundamentalsatzes in der Theori der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

Von

Oskar Perron in Heidelberg.

§ 1.

Sei

$$f(x, y, z, p) = \sum_{\varkappa\lambda\mu\nu}^{0,\infty} A_{\varkappa\lambda\mu\nu}\, x^\varkappa\, y^\lambda\, z^\mu\, p^\nu \tag{1}$$

eine am Nullpunkt reguläre Funktion ihrer vier Argumente. Die Reih möge etwa für

$$|x| \leqq \varrho, \quad |y| \leqq \sigma, \quad |z| \leqq \tau, \quad |p| \leqq \frac{\tau}{\varrho}$$

absolut konvergieren, so daß

$$|A_{\varkappa\lambda\mu\nu}| \leqq \frac{M\varrho^\nu}{\varrho^\varkappa\,\sigma^\lambda\,\tau^{\mu+\nu}} \tag{2}$$

ist, wo M eine geeignete Konstante bedeutet; derartige positive Zahl ϱ, σ, τ lassen sich stets angeben. Der Fundamentalsatz in der Theor der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung besagt dann im ei fachsten Fall, wenn nur zwei unabhängig Variable und nur eine unbekann Funktion vorliegen:

Die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right) \tag{3}$$

hat ein und nur ein Integral $z = z(x, y)$, *welches am Nullpunkt regul ist und für* $y = 0$ *verschwindet*·

$$z = \sum_{\varkappa\lambda}^{0,\infty} B_{\varkappa\lambda}\, x^\varkappa\, y^{\lambda+1}. \tag{4}$$

Allgemeinere Anfangsbedingungen lassen sich durch einfache Tra formation auf die genannte reduzieren.

Den Fundamentalsatz beweist man mit der Majorantenmethode, und r kann man auf zwei wesentlich verschiedene Arten vorgehen. Die e Art ist die der Frau von Kowalewsky[1]). Dabei wird der Satz ächst nur für *lineare* Differentialgleichungen bewiesen, und dann der emeine Fall darauf zurückgeführt. Durch diese Reduktion entsteht r aus einer Differentialgleichung stets ein System von mehreren ichungen. In unserm Fall müssen z. B. die drei Unbekannten

$$u_1 = z, \quad u_2 = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad u_3 = \frac{\partial z}{\partial y} - f(x, 0, 0, 0)$$

geführt werden, und das lineare System ist dann folgendes:

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = f(x, y, u_1, u_2),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{\partial u_3}{\partial x} + f'_x(x, 0, 0, 0),$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial y} = f'_y(x, y, u_1, u_2) + f'_{u_1}(x, y, u_1, u_2) f(x, y, u_1, u_2) + f'_{u_2}(x, y, u_1, u_2)\left(\frac{\partial u_3}{\partial x} + f'_x(x, 0, 0, 0)\right)$$

den Anfangsbedingungen $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ für $y = 0$. Die hode hat also den für didaktische Zwecke recht erheblichen Nachteil, man gerade den einfachsten Fall, wo nämlich *nur eine* Differential- chung vorliegt, nicht behandeln kann, ohne zugleich den komplizierteren l mehrerer Differentialgleichungen in Betracht zu ziehen.

Die zweite Beweisart rührt von Herrn Goursat her[2]). Sie führt ächst an Stelle von z durch die Substitution

$$z = A_{0000}\, y + u$$

e neue Variable u ein. Dadurch geht die Differentialgleichung (3) in e ebenso gebaute über, wobei aber das konstante Glied in der Reihe (1) t. Alsdann wird gezeigt, wie sich die Koeffizienten $B_{\varkappa\lambda}$ der Reihe (4) deutig berechnen lassen, und daß diese Koeffizienten vergrößert werden, n man die Differentialgleichung durch eine gewisse Hilfsdifferential- chung ersetzt. Wenn man die letztere, wie das bei den analogen Be- chtungen in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen der l ist, unter den verlangten Anfangsbedingungen explizit integrieren nte, so wäre die Reihe mit den vergrößerten Koeffizienten bekannt, die Konvergenzfrage gelöst und der Existenzbeweis erbracht. Das

[1]) Sophie von Kowalewsky, Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen, rnal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 80 (1875), S. 1–32.

[2]) Man vergleiche die ausgezeichnete Darstellung in dem Buche von Horn: führung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen, Leipzig 1910.

ist aber nicht der Fall, und die Goursatsche Methode muß an dies Stelle noch einen besonderen Kunstgriff anwenden, um zum Ziel zu g langen.

Ich werde im folgenden an Stelle der Goursatschen Hilfsdifferentia gleichung eine andere setzen, deren Integral sich explizit angeben läß wodurch der ganze Beweis viel anschaulicher wird, und auch eine Mindes größe für die Konvergenzradien wirklich angegeben werden kann.

§ 2.

Der Einfachheit halber wollen wir $\varrho = \sigma = \tau = 1$ annehmen, so da nach (2) $|A_{\varkappa\lambda\mu\nu}| \leqq M$ ist; das bedeutet keine Beschränkung der A gemeinheit, sondern wird durch die Transformation

$$x = \varrho x_1, \qquad y = \sigma y_1, \qquad z = \tau z_1$$

erreicht. Wenn nun die Reihe (4) ein Integral der Differentialgleichung (ist, so sind ihre Koeffizienten die folgenden:

$$B_{\varkappa\lambda} = \frac{1}{\varkappa!\,(\lambda+1)!}\left(\frac{\partial^{\varkappa+\lambda+1} z}{\partial x^{\varkappa}\,\partial y^{\lambda+1}}\right)_{x=y=0}$$

und können daher durch wiederholte Differentiation der Gleichung (*eindeutig* berechnet werden. Auf das gleiche läuft die folgende Metho hinaus, die für die wirkliche Rechnung bequemer ist. Man setze

$$\sum_{\varkappa=0}^{\infty} A_{\varkappa\lambda\mu\nu} x^{\varkappa} = f_{\lambda\mu\nu}(x),$$

$$\sum_{\varkappa=0}^{\infty} B_{\varkappa\lambda} x^{\varkappa} = \varphi_{\lambda}(x),$$

wodurch die Gleichungen (3), (4) übergehen in:

$$(3') \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \sum_{\lambda\mu\nu}^{0,\infty} f_{\lambda\mu\nu}(x)\, y^{\lambda} z^{\mu} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{\nu},$$

$$(4') \qquad z = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \varphi_{\lambda}(x)\, y^{\lambda+1}.$$

Setzt man dann den Wert von z aus (4′) in (3′) ein, so folgt:

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} (\lambda+1)\,\varphi_{\lambda}(x)\, y^{\lambda} = \sum_{\lambda\mu\nu}^{0,\infty} f_{\lambda\mu\nu}(x)\, y^{\lambda+\mu+\nu} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \varphi_r(x)\, y^r\right)^{\mu} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \varphi_s'(x)\, y^s\right)^{\nu}$$

und wenn man die rechte Seite nach Potenzen von y ordnet, ermöglic die beiderseitige Koeffizientenvergleichung eine rekurrente Berechnung d

bekannten Funktionen $\varphi_\lambda(x)$. Die ersten beiden Formeln sind z. B. folgenden:

$$\varphi_0(x) = f_{000}(x),$$
$$2\varphi_1(x) = f_{100}(x) + f_{010}(x)\varphi_0(x) + f_{001}(x)\varphi_0'(x).$$

Bei beiden Rechnungsarten erkennt man sofort, daß die Koeffizienten ganze rationale Funktionen der $A_{\varkappa\lambda\mu\nu}$ sind mit positiven Koeffizienten. zt man also an Stelle der Differentialgleichung (3) die folgende:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \sum_{\varkappa\lambda\mu\nu}^{0,\infty} M x^\varkappa y^\lambda z^\mu \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^\nu = \frac{M}{(1-x)(1-y)(1-z)\left(1-\frac{\partial z}{\partial x}\right)},$$

tritt, weil $M \geqq |A_{\varkappa\lambda\mu\nu}|$ ist, an Stelle von (4) eine Reihe

$$\sum_{\varkappa\lambda}^{0,\infty} C_{\varkappa\lambda} x^\varkappa y^{\lambda+1},$$

bei offenbar

$$C_{\varkappa\lambda} \geqq |B_{\varkappa\lambda}|$$

Dasselbe wird erst recht erreicht, wenn wir an Stelle der letzten ferentialgleichung eine setzen, bei der die Reihenentwicklung der rechten te noch größere Koeffizienten hat, etwa diese:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{M}{(1-x)(1-y)\left(1-z-\frac{\partial z}{\partial x}\right)};$$

um so mehr, wenn wir abermals eine mit größeren Koeffizienten len; es empfiehlt sich die folgende:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{M}{(1-x)\left(1-\frac{y}{(1-x)^2}\right)\left(1-\frac{z}{1-x}-\frac{\partial z}{\partial x}\right)}.$$

Auch die Gleichung (5) *wird also formal durch eine eindeutig be-mmte Reihe der Form*

$$z = \sum_{\varkappa\lambda}^{0,\infty} D_{\varkappa\lambda} x^\varkappa y^{\lambda+1}$$

iedigt, und nach dem Gesagten ist gewiß

$$D_{\varkappa\lambda} \geqq |B_{\varkappa\lambda}|.$$

Für die Differentialgleichung (5) läßt sich aber ein Integral der m (6) wirklich angeben. Zu dem Zweck suchen wir ein Integral von Gestalt

$$z = (1-x)F(u), \quad \text{wobei} \quad u = \frac{y}{(1-x)^2}.$$

Setzt man diesen Ausdruck für z in die Differentialgleichung (5) ein, s geht sie über in:

$$F'(u) = \frac{M}{(1-u)(1-2uF'(u))}, \tag{9}$$

oder also:

$$2uF'(u)^2 - F'(u) + \frac{M}{1-u} = 0.$$

Hieraus folgt durch Auflösung, da $F'(u)$ für $u = 0$ regulär sein soll:

$$F'(u) = \frac{1-\sqrt{1-\frac{8Mu}{1-u}}}{4u} = M + (M + 2M^2)u + \dots. \tag{10}$$

Die Differentialgleichung (5) hat hiernach das Integral

$$z = (1-x)F(u) = (1-x)F\left(\frac{y}{(1-x)^2}\right) = (1-x)\int_0^{\frac{y}{(1-x)^2}} \frac{1-\sqrt{1-\frac{8Mu}{1-u}}}{4u}du$$

$$= M\frac{y}{1-x} + \frac{1}{2}(M + 2M^2)\frac{y^2}{(1-x)^3} + \dots.$$

Da dieses am Nullpunkt regulär ist und für $y = 0$ verschwindet, kann kein anderes als das durch die Reihe (6) dargestellte Integral sein, da die Koeffizienten $D_{\varkappa\lambda}$ eindeutig bestimmt sind.

Die Reihe (10) hat den Konvergenzradius $\frac{1}{1+8M}$, so daß auch d Reihe (6) für positive x, y konvergieren wird, solange

$$x < 1, \qquad \frac{y}{(1-x)^2} < \frac{1}{1+8M}$$

ist. *Versteht man daher unter r_1 irgendeine Zahl zwischen 0 und 1, u setzt man*

$$\frac{(1-r_1)^2}{1+8M} = r_2,$$

so ist die Reihe (6) *für $|x| < r_1$, $|y| < r_2$ konvergent. Mindestens gleichen Bereich konvergiert daher die Reihe* (4) *und stellt ein Integ der gegebenen Differentialgleichung* (3) *dar.*

§ 3.

Die Methode läßt sich verallgemeinern. Wir betrachten ein Syst von n partiellen Differentialgleichungen für n unbekannte Funktion $z_1, z_2, \dots, z_n$ von $m+1$ unabhängig Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_m$, Das System sei folgendes:

$$\frac{\partial z_i}{\partial y} = f_i\left(x_1, \dots, x_m, y, z_1, \dots, z_n, \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z_1}{\partial x_m}, \dots, \frac{\partial z_n}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z_n}{\partial x_m}\right) \tag{11}$$

$$(i = 1, 2, \dots,$$

bei sollen die Funktionen f_i in Taylorsche Reihen nach Potenzen ihrer $+1+n+mn$ Argumente entwickelbar sein, und wir dürfen wieder ehmen, daß die Reihen absolut konvergieren, solange alle Argumente olut $\leqq 1$ sind. Die Koeffizienten der Reihen bleiben dann unterhalb er Schranke M.

Wir wollen zeigen, daß es Funktionen z_i von $x_1, \ldots, x_m, y$ gibt, die Differentialgleichungen (11) genügen, die ferner am Nullpunkt regulär d und für $y = 0$ verschwinden:

$$z_i = \sum_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_m \lambda} B^{(i)}_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_m \lambda} x_1^{\varkappa_1} \ldots x_m^{\varkappa_m} y^{\lambda+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Koeffizienten von (12) lassen sich wieder eindeutig durch wiederholte ferentiation von (11) berechnen, oder auch, indem man die Reihen (12) (11) einsetzt und speziell nach Potenzen von y entwickelt. Um die nvergenz zu beweisen, ersetzen wir das Gleichungssystem (11) durch anderes, welches eine Vergrößerung der Koeffizienten $B^{(i)}_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_m \lambda}$ bewirkt. r können zunächst das folgende wählen:

$$\frac{\partial z_i}{\partial y} = \frac{M}{\prod_\mu (1 - x_\mu) \cdot (1 - y) \cdot \prod_\nu (1 - z_\nu) \cdot \prod_{\nu\mu} \left(1 - \frac{\partial z_\nu}{\partial x_\mu}\right)},$$

r erst recht dieses:

$$\frac{\partial z_i}{\partial y} = \frac{M}{\left(1 - \sum_\mu x_\mu\right)(1 - y)\left(1 - \sum_\nu z_\nu - \sum_{\nu\mu} \frac{\partial z_\nu}{\partial x_\mu}\right)},$$

r schließlich durch nochmalige Vergrößerung der Koeffizienten:

$$\frac{\partial z_i}{\partial y} = \frac{M}{\left(1 - \sum_\mu x_\mu\right)\left(1 - \frac{y}{\left(1 - \sum_\mu x_\mu\right)^2}\right)\left(1 - \frac{m \sum_\nu z_\nu}{1 - \sum_\mu x_\mu} - \sum_{\nu\mu} \frac{\partial z_\nu}{\partial x_\mu}\right)}.$$

Von diesem letzten Gleichungssystem lassen sich aber die für $y = 0$ schwindenden Integrale explizit angeben. Wir setzen zunächst

$$\sum_{\mu=1}^{m} x_\mu = x$$

l suchen dann ein Integralsystem der Form

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_n = \frac{1}{mn} Z(x, y).$$

Für ein solches gehen die Gleichungen (13) über in:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{Mmn}{(1-x)\left(1-\frac{y}{(1-x)^2}\right)\left(1-\frac{Z}{1-x}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)}. \tag{16}$$

Das ist aber genau die Gleichung (5), welche wir in § 2 integriert haben nur ist Mmn an Stelle von M getreten. Nach den Ergebnissen des § läßt sich das für $y = 0$ verschwindende Integral von (16) in eine Reih nach Potenzen von x und y entwickeln, welche konvergiert, solange

$$|x| < r_1, \quad |y| < r_2 = \frac{(1-r_1)^2}{1+8Mmn}$$

ist, wo r_1 irgendeine Zahl zwischen 0 und 1 bedeuten darf. Die Formel (15) liefern dann, wenn $x = \sum x_\mu$ gesetzt wird, auch derartige Integral des Systems (13). Um so mehr konvergieren daher die Reihen (12) fü

$$\sum_{\mu=1}^{m} |x_\mu| < r_1, \quad |y| < r_2$$

und stellen also Integrale des gegebenen Differentialgleichungssystem (11) dar.

(Eingegangen am 25. Mai 1919.)

Axial symmetrische kubische Raumkurven*).

Von

Th. Reye in Würzburg †.

---

1. Unter den ∞^{12} kubischen Raumkurven gibt es ∞^{10} „axial symtrische". Jede eigentliche Gerade a ist Symmetrieachse von ∞^6 dieser umkurven r^3. Denn durch drei Punkte P, Q, R, die in je einer geenen Ebene liegen, und die Punkte P_1, Q_1, R_1, in die sie an a sich egeln, geht eine der Kurven r^3; sie ist durch die sechs Punkte benmt. Ihre Punkte, Tangenten und Schmiegungsebenen gehen durch Spieung an a paarweise ineinander über, sie hat also a zur Symmetrieise. Die Achse a schneidet ∞^1 Bisekanten der Raumkurve r^3 rechtklig, sie hälftet die auf ihnen enthaltenen Sehnen von r^3 und liegt ihnen und r^3 auf einem gleichseitigen Paraboloid. Sie und die endlich ferne Gerade a' der zu a normalen Ebenen sind zwei assoziierte miegungsstrahlen der Raumkurve (G. d. L.[1]) II, S. 175), denn sie nnen die Punkte von r^3 paarweise harmonisch. Die Symmetrieachse a neidet demnach eine Tangente t_a und eine Asymptote u_a von r^3 rechtklig. Sie geht durch den Berührungspunkt von t_a und liegt in seiner miegungsebene, a' aber geht durch den Berührungspunkt der Asymptote u_a l liegt in seiner Asymptotenebene. Die zu a normalen wirklichen Bianten von r^3 schneiden die Raumkurve in den Punktepaaren einer Inution, welche die Berührungspunkte von t_a und u_a zu Doppelpunkten (G. d. L. II, S. 174).

---

*) Theodor Reye ist am 2. Juli 1919 im Alter von 81 Jahren aus dem Leben hieden. Die Korrekturen dieser Arbeit konnte er nicht mehr selbst lesen. Sie von Herrn St. Jolles erledigt worden. Wir rechnen es uns als besondere Ehre daß es uns vergönnt war, die letzte Publikation des hochverdienten Verfassers er Mathematischen Zeitschrift zum Abdruck zu bringen. Die Schriftleitung.

[1]) Mit „G. d. L." zitieren wir Reye, Die Geometrie der Lage, Teil I, 5. A ufl. pzig 1909; Teil II und III, 4. Aufl., Leipzig 1907—10.

2. Zwei gleichseitige Dreiecke in parallelen Ebenen sind einer eigen artigen kubischen Raumkurve r^3 einbeschrieben, wenn die Verbindungs gerade v ihrer Schwerpunkte zu ihren Ebenen normal ist, und wenn kein vier ihrer Eckpunkte in einer Ebene liegen. Die Eckpunkte eines jede der zwei Dreiecke gehen durch Drehung um v zyklisch ineinander übe wenn der Drehungswinkel 120^0 beträgt; die Raumkurve r^3 aber ist durc die sechs Eckpunkte bestimmt und wird folglich durch die Drehung i sich selbst übergeführt. Sie besteht aus drei kongruenten Zweigen, d durch Dritteldrehung um v zyklisch ineinander übergehen.

3. Jede zu v rechtwinklige Ebene σ schneidet die Raumkurve r^3 i den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Schwerpunkt S auf liegt. Auch diese drei Punkte sowie ihre Tangenten und Schmiegung ebenen gehen durch Dritteldrehung um v zyklisch ineinander über. D Schnittpunkt der drei Schmiegungsebenen wird also durch die Drehung sich selbst übergeführt, er liegt folglich auf der Drehachse v und ist d Schnittpunkt S von v mit der Ebene σ (G. d. L. II, S. 175). In de Nullraum N_r, der durch r^3 als eine seiner kubischen Nullkurven bestimm ist und jedem Punkte von r^3 seine Schmiegungsebene zuordnet, hat der nach jede zu v normale Ebene σ ihren Schnittpunkt S mit v zum Nul punkt. Folglich ist v die Hauptachse des Nullraums, ihr ist in N_r d unendlich ferne Gerade v' der zu v normalen Ebenen zugeordnet. D auf v errichteten Senkrechten sind Nullstrahlen von N_r und, wenn sie d Raumkurve schneiden, Schmiegungsstrahlen von r^3. Die unendlich fer Gerade v' ist eine virtuelle Biplanare, die ihr zugeordnete Hauptachse eine virtuelle Bisekante der Raumkurve r^3 (G. d. L. II, S. 186).

4. Die Raumkurve r^3 wird aus ihren drei Schnittpunkten A, B, mit einer zu v normalen Ebene σ durch kongruente Strahlenkegel zweit Ordnung projiziert. Mit dem Kreise k^2, der A, B und C verbindet, lie sie auf einem Rotationshyperboloid R^2, das v zur Rotationsachse hat[2]. Denn aus zwei Bisekanten p, q von r^3, die durch je einen Punkt P, von k^2 gehen, wird r^3 durch projektive Ebenenbüschel projiziert; die erzeugen ein Hyperboloid R^2, das p und q mit r^3 verbindet und au den Kreis k^2 enthält, weil es mit ihm die fünf Punkte P, Q, A, B, gemein hat; R^2 aber wird nicht nur von σ, sondern auch von jeder ander zu v normalen Ebene in einem Kreise mit der Rotationsachse v geschnitt und folglich sowohl von r^3 wie von p und q durch Rotation um v b schrieben.

5. Die Ebene σ enthält drei Schmiegungsstrahlen a, b, c der Rau kurve r^3; sie verbinden je einen der Kurvenpunkte A, B, C mit de

[2]) Diese Bemerkung verdanke ich Herrn Jolles.

llpunkte S von σ, dem Mittelpunkte des A, B und C verbindenden eises k^2, und hälften das gleichseitige Dreieck ABC. Jedem Punkte a ist in bezug auf r^3 ein Punkt des mit a assoziierten Schmiegsstrahles a' konjugiert (G. d. L. II, S. 182). Nun schneidet aber a Sehne BC von r^3 in ihrem Mittelpunkte rechtwinklig, und diesem ist a' der unendlich ferne Punkt der Bisekante BC konjugiert. Die den assoziierten Schmiegungsstrahlen a, a' kreuzen sich also rechtklig; sie sind auf v senkrecht in zwei für r^3 konjugierten Punkten S, S', l durch sie sind die Punkte von r^3 paarweise harmonisch getrennt.

6. Fällt S, wie wir nunmehr annehmen, mit dem Mittelpunkte O Rotationshyperboloides R^2 zusammen, so ist S' der unendlich ferne nkt O' der Drehachse v, und a' liegt unendlich fern in den zu a normalen Ebenen; der mit a' assoziierte Schmiegungsstrahl a ist also eine nmetrieachse von r^3. Kurz: *Die drei Schmiegungsstrahlen a, b, c der umkurve r^3, welche die Rotationsachse v des Hyperboloides R^2 in nem Mittelpunkte O rechtwinklig schneiden, sind Symmetrieachsen*[3]) *r^3; sie liegen in der zu v normalen Symmetrieebene von R^2 und len miteinander Winkel von* 120°. Wir bezeichnen deshalb diese ische Raumkurve als „dreifach axial symmetrisch" oder kürzer als eifach axial". Aus den Spiegelungen an zweien der Geraden a, b, c ltiert eine Dritteldrehung um die Drehachse v.

7. Die Raumkurve r^3 schneidet ihre drei Symmetrieachsen a, b, c . in A, B, C rechtwinklig. Die Tangenten t_a, t_b, t_c dieser drei Schnittkte liegen auf einem Hyperboloid, das v zur Rotationsachse hat und längs eines Kreises berührt. Auch die drei Asymptoten u_a, u_b, u_c r^3 liegen auf einem Hyperboloid, das v zur Rotationsachse hat, und neiden bzw. a, b, c rechtwinklig. Sind bzw. A', B', C' ihre unendlich en Berührungspunkte, so spiegeln sich an a die Asymptote u_a und ihr ührungspunkt A' in sich selbst, dagegen werden die Asymptoten u_b, u_c ie ihre Berührungspunkte B', C' an a ineinander gespiegelt. Der von a hnittene Zweig der Raumkurve kann deshalb mit $B'AC'$ bezeichnet den, der von b oder c geschnittene mit $C'BA'$ bzw. $A'CB'$. Die Zweige sind in den unendlich fernen Punkten A', B', C' miteinander unden, sie bilden zusammen die ganze Raumkurve $B'AC'BA'CB'$.

8. Die auf a, b und c senkrechte Drehachse v ist die Hauptachse ∞^1 Nullräumen N_r. Diese haben die ∞^2 auf v senkrechten Strahlen gemeinsamen Nullstrahlen; insbesondere sind in ihnen die Symmetrieen a, b, c von r^3 und die unendlich fernen Geraden a', b', c' der . zu a, b, c normalen Ebenen sich selbst zugeordnet (G. d. L. II,

[3]) Auch diese Bemerkung verdanke ich Herrn Jolles.

S. 119). In einem geschart involutorischen Raum, der a, a' oder b, b' oder c, c' zu Involutionsachsen hat, sind die ∞^1 Nullräume N_r und ihr linearen Strahlenkomplexe sich selbst zugeordnet (G. d. L. II, S. 112); s haben also die Geraden a, b, c zu gemeinsamen Symmetrieachsen, ab auch v, weil sie bekanntlich durch jede Drehung um v, insbesondere durc jede halbe Drehung in sich selbst übergehen. In jedem dieser ∞^1 Nul räume N_r ist der dreifach axialen Raumkurve r^3 eine dreifach axia kubische Raumkurve r_1^3 zugeordnet, die wie r^3 die Geraden a, b, c z Symmetrieachsen hat; denn durch Spiegelung an a, b oder c gehen r^3 ur N_r in sich selbst über und mit ihnen die Raumkurve r_1^3, deren Punkt Tangenten und Schmiegungsebenen bzw. den Schmiegungsebenen, Tangente und Punkten von r^3 in N_r zugeordnet sind.

9. Es gibt ∞^1 gescharte Kollineationen γ, die alle Punkte und Eben der Drehachse v und der unendlich fernen Gerade v' aller zu v normal Ebenen in Ruhe lassen; für sie sind invariant die ∞^2 auf v senkrecht Strahlen, insbesondere die drei Symmetrieachsen a, b, c der dreifach axi len kubischen Raumkurve r^3 und die unendlich fernen Geraden a', b', c' d bzw. zu a, b, c normalen Ebenen. Aus den Nullkorrelationen ν, ν_1 v zweien der ∞^1 Nullräume, die v zur Hauptachse haben, resultiert eine dies Kollineationen $\gamma = \nu\nu_1$, und sogar jede von ihnen, wenn einer der Nu räume so sich ändert, daß v seine Hauptachse bleibt (vgl. G. d. L. II, S. 12

10. Die ∞^1 gescharten Kollineationen γ transformieren einen gegeben Punkt P in die ∞^1 Punkte der von P auf v gefällten Normale. Sie tran formieren die dreifach axiale kubische Raumkurve r^3 in ∞^1 ande dreifach axiale kubische Raumkurven r_2^3, die wie r^3 die Geraden a, b, zu Symmetrieachsen haben (Nr. 8, 9). Diese Kurven r_2^3 haben ∞^1 v senkrechte Schmiegungsstrahlen mit r^3 gemein (Nr. 3). Der geom trische Ort dieser Schmiegungsstrahlen und der ∞^1 Raumkurven r_2^3 i eine Regelfläche sechsten Grades, welche die Punkte von v zu dreifach Punkten hat und die zu v normalen Ebenen in je drei Strahlen schneid und sie in deren unendlich fernen Punkten dreifach berührt. Eine G rade g schneidet nämlich nur sechs der ∞^1 gemeinsamen Schmiegungsstra len, weil die mit g inzidenten Normalen von v auf einem gleichseitig Paraboloid liegen, und dieses mit r^3 nur sechs Punkte gemein hat.

11. Es gibt ∞^2 Rotationsflächen R^2, die a, b und c zu Symmetr achsen, also v zur Rotationsachse haben. Von ihnen berühren sich c längs jedes der konzentrischen Kreise, in denen sie ihre Symmetr ebene abc schneiden. Jeder ihrer ∞^1 Asymptotenkegel berührt in seine unendlich fernen Kreise ∞^1 der Flächen R^2. Die vier Symmetrieachs a, b, c, v der ∞^2 Rotationsflächen R^2 sind für eine jede der Flächen

v. zu den unendlich fernen Geraden a', b', c', v' polar. Die ∞^2 Flächen R^2 l invariant für die Spiegelungen an ihren Symmetrieachsen und für e Drehung um ihre Rotationsachse v. Für eine gegebene von ihnen, R_i^2, zu der dreifach axialen Kurve r^3 eine andere dreifach axiale kubische umkurve r_i^3 polar, die wie r^3 die Geraden a, b, c zu Symmetrieachsen . Denn durch Spiegelung an a, b oder c gehen r^3 und die Fläche R_i^2 sich selbst über und mit ihnen zugleich die Polarkurve r_i^3 von r^3 in ug auf R_i^2. Durch die polare Korrelation χ_i, die durch R_i^2 als Inzizfläche bestimmt ist, werden die Punkte, Tangenten und Schmiegungsnen einer jeden der Raumkurven r^3, r_i^3 bzw. in die Schmiegungsebenen, ngenten und Punkte der anderen übergeführt; χ_i vertauscht also die ifach axialen Raumkurven r^3, r_i^3 miteinander. Die polaren Korrelationen ∞^2 Rotationsflächen R^2 transformieren die Raumkurve r^3 in ∞^2 kuche Raumkurven, die wie r^3 die drei Geraden a, b, c zu Symmetrieisen haben.

12. Vertauscht die polare Korrelation χ_k der Rotationsfläche zweiter lnung R_k^2 die dreifach axiale Raumkurve r^3 mit der dreifach axialen r_k^3, führt die aus χ_i und χ_k resultierende Kollineation $\chi_i\chi_k$ die Raumkurve r_i^3 r_k^3 über. Durch die zu ihr inverse Kollineation $\chi_k\chi_i$ wird r_k^3 in r_i^3 überührt. Die Kollineation $\chi_i\chi_k$ läßt die acht Geraden $a, b, c, v, a', b', c', v'$ l folglich alle Ebenen der Drehachse v und alle Punkte der Gerade v' Ruhe (Nr. **11**), sie ist also axial. Die acht Geraden sind für ∞^2 axiale llineationen invariant; diese führen einen gegebenen Punkt P über in ∞^2 Punkte der Ebene vP, die Raumkurve r^3 aber in ∞^2 kubische umkurven, die mit r^3 die drei Symmetrieachsen a, b, c gemein haben.

Berühren sich die Rotationsflächen R_i^2, R_k^2 längs eines Kreises k^2 ihrer nmetrieebene abc, so läßt die Kollineation $\chi_i\chi_k$ alle Punkte und ahlen dieser Ebene und alle zu abc normalen Ebenen und Strahlen Ruhe. Sie ist in diesem Falle perspektiv; abc ist ihre Kollineationsne, und der unendlich ferne Punkt O' von v ist ihr Kollineationszentrum. il die Rotationsfläche R_i^2 von ∞^1 anderen Rotationsflächen R_k^2 längs Kreises k^2 berührt wird, so gibt es ∞^1 perspektive Kollineationen $_k$; sie transformieren die dreifach axiale Raumkurve r^3 in ∞^1 zu ihr spektive dreifach axiale kubische Raumkurven, die mit r^3 die Symmetrieisen a, b, c gemein haben und auf einem kubischen Zylinder liegen.

Auch dann ist $\chi_i\chi_k$ eine perspektive Kollineation, wenn der Kreis, in n sich R_i^2 und R_k^2 berühren, unendlich fern liegt; es sind dann alle unllich fernen Punkte und Strahlen sowie alle Durchmesserebenen und rchmesser von R_i^2 in Ruhe. Die perspektive Kollineation $\chi_i\chi_k$ hat in sem Falle eine unendlich ferne Kollineationsebene und den Mittelnkt O von R_i^2 und R_k^2 zum Kollineationszentrum und Ähnlichkeitspunkt.

13. Die drei Geraden a, b, c sind Symmetrieachsen von ∞^2 dreifac axialen kubischen Raumkurven r^3 (Nr. 11, 12); sie schneiden in jede ihrer von O verschiedenen eigentlichen Punkte ∞^1 dieser Kurven rech winklig. Eine der ∞^2 Raumkurven r^3 ist bestimmt durch die Punkt A, B, C, in denen sie ihre Symmetrieachsen a, b, c rechtwinklig schneide und durch deren Tangenten t_a, t_b, t_c. Da diese Punkte und Tangente durch eine Dritteldrehung um v zyklisch ineinander übergehen, so ist d Raumkurve auch bestimmt durch ihren Schnittpunkt A mit a, seine zu normale Tangente t_a und die Drehachse v.

14. Der Nullraum N_r, der r^3 zu einer kubischen Nullkurve ha und sein linearer Strahlenkomplex sind durch die Hauptachse v und de Komplexstrahl t_a bestimmt (G. d. L. II, S. 119). Er ordnet jeder Ebene von a einen Nullpunkt A_1 auf a zu. Die mit α_1 und A_1 inzidente No male t'_a der Symmetrieachse a berührt in A_1 eine kubische Nullkurve vo N_r, die wie r^3 die drei Geraden a, b, c zu Symmetrieachsen hat (Nr. 1 Jeder der ∞^1 Nullräume, die v zur Hauptachse haben, enthält demnac als seine Nullkurven ∞^1 der ∞^2 dreifach axialen kubischen Raumkurven mit den Symmetrieachsen a, b, c; er ordnet die übrigen ∞^2 Raumkurven paarweise einander zu (Nr. 8).

15. Die ∞^2 dreifach axialen Raumkurven r^3 sind paarweise rezipro polar für eine jede Rotationsfläche zweiter Ordnung R^2, die m ihnen die Symmetrieachsen a, b, c gemein hat (Nr. 11). Sie werden i einander übergeführt durch jede der ∞^2 axialen Kollineationen, die d acht Geraden $a, b, c, v, a', b', c', v'$ in Ruhe lassen (Nr. 12). — Unt den ∞^2 kubischen Raumkurven r^3 gibt es zu jeder von ihnen ∞^1 ähn liche und ähnlich liegende; O ist ihr Ähnlichkeitspunkt (Nr. 12). S haben ihre drei unendlich fernen Punkte miteinander gemein und liege auf einem kubischen Strahlenkegel K^3 mit dem Zentrum O. Ihre hom logen Punkte liegen auf je einem Strahle von K^3, ihre homologen Ta genten sind parallel und liegen in je einer Berührungsebene von K^3, ih homologen Schmiegungsebenen sind gleichfalls parallel. — Zu jeder d ∞^2 Raumkurven r^3 gibt es unter ihnen noch andere ∞^1 perspekti kollineare; diese haben den unendlich fernen Punkt O' von v zum Koll neationszentrum und $a\,b\,c$ zur Kollineationsebene (Nr. 12). Ihr geom trischer Ort ist ein kubischer Zylinder Z^3, dessen Strahlen durch O' gehe Ihre homologen Punkte liegen auf je einem Strahle von Z^3, ihre hom logen Tangenten schneiden die Ebene $a\,b\,c$ in je einem Punkte ein Kurve vierter Ordnung dritter Klasse k^4 und liegen in je einer Berü rungsebene von Z^3, ihre homologen Schmiegungsebenen schneiden si in je einer Tangente von k^4.

16. Von den ∞^2 dreifach axialen kubischen Raumkurven r^3 mit den mmetrieachsen a, b, c geht eine durch jeden Punkt P, der weder unend- h fern noch in einer der sieben Ebenen abc, va, vb, vc, va', vb', vc' gt. Sie verbindet die drei Punkte P_1, in die sich P an a, b und c egelt, mit P und zwei anderen Punkten P_2, in die sich die drei nkte P_1 an a, b und c spiegeln. Sowohl die drei Punkte P_1 als auch r Punkt P und die zwei Punkte P_2 bilden ein gleichseitiges Dreieck, ssen Ebene zu abc parallel, also zu v normal ist, und dessen Schwerpunkt f v liegt; die sechs Eckpunkte dieser zwei kongruenten Dreiecke aber nen durch Dritteldrehung um v zyklisch ineinander über. Damit ist der tz bewiesen.

In einem Nullraum N_r mit der Hauptachse v ist der durch P nenden dreifach axialen kubischen Raumkurve r^3 eine dreifach axiale bische Raumkurve r_1^3 zugeordnet, die mit r^3 die Symmetrieachsen a, b, c nein hat (Nr. 8) und der Nullebene π von P sich anschmiegt. In N_r O der Nullpunkt der Ebene abc, die Punkte $v'a'$, $v'b'$, $v'c'$ sind v. die Nullpunkte der Ebenen va', vb', vc', und die unendlich fernen nkte von v, a, b, c sind bzw. die Nullpunkte der Ebenen $a'b'c'$, va, , vc. Jede Ebene π, die weder zu einer der Geraden v, a, b, c parallel noch durch deren Schnittpunkt O oder einen der Punkte $v'a'$, $v'b'$, $v'c'$ it, ist demnach Schmiegungsebene von einer der ∞^2 dreifach axialen bischen Raumkurven mit den Symmetrieachsen a, b, c.

17. Aus der Nullkorrelation ν eines Nullraums N_r mit der Haupt- nse v und der polaren Korrelation χ_i einer Rotationsfläche zweiter Ord- ng R_i^2, die a, b und c zu Symmetrieachsen, also v zur Rotationsachse t, resultiert eine Kollineation $\nu\chi_i$. Sie läßt die Drehachse v und ihre endlich ferne Polare v' für R_i^2 in Ruhe und vertauscht die Symmetrieachsen b, c bzw. mit a', b', c'. Sie vertauscht also den Punkt $va = O$ mit $' = O'$, die Ebenen va, vb, vc bzw. mit den zu ihnen normalen Ebenen ', vb', vc', und die durch v' gehenden Ebenen abc, $a'b'c'$ miteinander, die unendlich fernen Punkte $v'a$, $v'b$, $v'c$ aber bzw. mit $v'a'$, b', $v'c'$. Die Kollineation $\nu\chi_i$ vertauscht folglich die für R_i^2 konjurten Ebenen und Punkte von v paarweise miteinander, desgleichen die R_i^2 konjugierten Punkte und Ebenen von v' und die ∞^2 mit v und v' identen Strahlen. Wir bezeichnen sie als „halbgeschart", weil ihre eite Potenz eine gescharte Kollineation ist.

18. Es gibt ∞^2 halbgescharte Kollineationen $\nu\chi_i$, die die Symmetrie- nsen a, b, c bzw. mit ihren Polaren a', b', c' für R_i^2 vertauschen. Durch wird ein gegebener Punkt P in die ∞^2 Punkte der Ebene übergeführt, die Ebene vP in v rechtwinklig schneidet. Jede der ∞^2 Kollinea-

tionen $\nu\chi_i$ führt wie ihre Komponenten ν und χ_i die ∞^2 dreifach axialen Raumkurven r^3 ineinander über. Unter ihnen gibt es ∞^1 geschart involutorische Kollineationen. Sie resultieren aus der Nullkorrelation ν von N_r und den polaren Korrelationen der ∞^1 Rotationsflächen R_i^2, die nicht nur a, b und c zu Symmetrieachsen haben, sondern auch je ∞^1 Nullstrahlen von N_r enthalten (G. d. L. III, S. 197); denn ν und jede dieser Korrelationen χ_i sind füreinander invariant, also vertauschbar.

19. Die ∞^2 dreifach axialen kubischen Raumkurven r^3 mit den drei Symmetrieachsen a, b, c gehen durch eine Kollineation oder Korrelation über in ∞^2 kubische Raumkurven s^3, die in drei geschart involutorischen Räumen sich selbst zugeordnet sind, und deren drei Paar reelle Involutionsachsen a_1, a_1'; b_1, b_1'; c_1, c_1' zu gemeinsamen, paarweise assoziierten Schmiegungsstrahlen haben (vgl. Nr. **13**). Aus den Kollineationen von zweien dieser involutorischen Räume resultiert eine ternär zyklische Kollineation (Nr. **6**), diese führt die Strahlen a_1, b_1, c_1, ebenso a_1', b_1', c_1' und die Punkte einer jeden der ∞^2 Raumkurven s^3 zyklisch ineinander über. Die Strahlen a_1, b_1, c_1 liegen in einem Strahlenbüschel (O_1, ω_1), ebenso a_1', b_1', c_1' in einem Strahlenbüschel (O_1', ω_1'); für die ∞^2 Raumkurven s^3 sind O_1 und O_1' konjugiert, desgleichen ω_1 und ω_1'. Die ∞^2 Raumkurven s^3 haben die virtuelle Bisekante $O_1 O_1' = v_1$ und die virtuelle Biplanare $\omega_1 \omega_1' = v_1'$.

20. Jeder der ∞^1 Nullräume, in denen $O_1 O_1'$ und $\omega_1 \omega_1'$ einander zugeordnet sind, hat ∞^1 der Raumkurven s^3 zu kubischen Nullkurven und ordnet die ∞^2 übrigen paarweise einander zu (Nr. **14**). Für jede Fläche zweiter Ordnung, die den Strahlen a_1, b_1, c_1 bzw. die Gerade a_1', b_1', c_1' als Polaren zuordnet, sind die ∞^2 Raumkurven s^3 paarweis zueinander polar (Nr. **11**); solcher Flächen gibt es ∞^2. Die sechs Schmiegungsstrahlen $a_1, b_1, c_1, a_1', b_1', c_1'$ schneiden in jedem ihrer ∞^2 von O_1 und O_1' verschiedenen Punkte ∞^1 der Raumkurven s^3 (Nr. **13**). Durch jeden Punkt P_1, der in keiner der acht Ebenen $\omega_1, \omega_1', O_1'a_1, O_1'b_1, O_1'c_1$, $O_1a_1', O_1b_1', O_1c_1'$ liegt, geht eine der Raumkurven s^3; jede Ebene π_1, die mit keinem der acht Punkte $O_1, O_1', \omega_1'a_1, \omega_1'b_1, \omega_1'c_1, \omega_1a_1', \omega_1b_1', \omega_1c_1'$ inzident ist, schmiegt sich einer der Raumkurven an (Nr. **16**).

Würzburg, den 2. Juni 1919.

(Eingegangen am 9. Juni 1919).

Eine neue Polarentheorie der Raumkurven dritten Grades.

Von

Stanislaus Jolles in Berlin.

Die weitgehende Analogie zwischen den grundlegenden Eigenschaften
Kegelschnitte und der Raumkurven dritten Grades $\mathfrak{k}^3$ hat die Theorie
ser Raumkurven ausnehmend gefördert. Während aber jeder Kegel-
nitt die Inzidenzkurve eines polaren Feldes ist und jedes polare Feld
en Kegelschnitt zu seiner Inzidenzkurve hat, sind analoge Eigenschaften
Kurve $\mathfrak{k}^3$ nicht entdeckt worden. Zwar bestimmt jede Kurve $\mathfrak{k}^3$ als
llkurve einen Nullraum. Der Nullraum hat jedoch ∞^7 Kurven $\mathfrak{k}^3$ zu
llkurven. Seine Eigenschaften können somit nicht — wie es fälschlich
chieht — als polare Eigenschaften der Kurve $\mathfrak{k}^3$ bezeichnet werden.
ßer den Kurven $\mathfrak{k}^3$ enthält der Nullraum außerdem noch weitere Null-
:ven; es sei nur an die in ihm als Nullkurven auftretenden Schrauben-
en erinnert!

Anders liegt die Sache, wenn die Raumkurve dritten Grades $\mathfrak{k}^3$ (als
ngentenfolge) samt ihren Bisekanten und Biplanaren als ein Gebilde
Strahlenraumes aufgefaßt wird. Dabei zeigt sich, daß in der Bise-
nten- wie in der Biplanarenkongruenz von $\mathfrak{k}^3$ den Strahlen die Regel-
aren zweiter Ordnung als gleichberechtigte Elemente gegenüberstehen.
gezwungen kann in beiden Kongruenzen durch eine polare Korrelation
em Strahle eine dieser Regelscharen zugeordnet werden. Die so er-
tene polare Bisekantenkongruenz Π_1^3 von $\mathfrak{k}^3$ hat die Kurve selbst zu
er Inzidenzkurve. Gleiches gilt von der gleichzeitig gewonnenen polaren
ngruenz Π_3^1 der Biplanaren von $\mathfrak{k}^3$. Auf diesen Eigenschaften der
aren Kongruenzen Π_1^3 und Π_3^1 baut sich die hier entwickelte Polaren-
orie der Raumkurven dritten Grades auf. Sie vereinigt nicht nur be-
nte Sätze über die Kurven $\mathfrak{k}^3$ unter einem einheitlichen Gesichtspunkte
dern dürfte auch eine weitere Erforschung dieser Kurven wesentlich
ichtern.

I. Die polare Bisekantenkongruenz der kubischen Raumkurve.

1. Zwei aufeinander bezogene Gebilde zweiter Stufe, insbesondere n v. Staudt zwei Grundgebilde zweiter Stufe[1]), sind projektiv, wenn je z inzidenten ungleichartigen Elementen des einen zwei inzidente ungle artige Elemente des andern entsprechen. Die Gesamtheit aller Geb von ∞^2 Elementen, die sich auf die Grundgebilde zweiter Stufe projek beziehen lassen, bildet den „Projektivitätsbereich“[2]) der Grundgeb zweiter Stufe. Alle Gebilde des Projektivitätsbereiches sind projektiv einander beziehbar; je zwei von ihnen heißen „perspektiv“, wenn je Element des einen mit dem homologen Elemente des andern inzident

2. Sind $S'(a', \ldots, \alpha', \ldots)$ und $S''(a'', \ldots, \alpha'', \ldots)$ zwei kolline zentrische Bündel, welche die Kongruenz K_1^3 der Bisekanten einer k schen Raumkurve k^3 erzeugen, und sind die homologen Ebenen α', α'' dem Kongruenzstrahle a usf. inzident, so sind die Bündel S', S'' und Kongruenz K_1^3 aufeinander bezogen. Den Ebenen $\alpha', \ldots$ des Bündels entsprechen die Kongruenzstrahlen $a, \ldots$, den Ebenenbüscheln er Ordnung $a', \ldots$ die zu ihnen perspektiven Regelscharen zweiter Ordn $\mathfrak{A}^2, \ldots$ von K_1^3. Den Ebenen des zentrischen Bündels sind also Strahlen, seinen Strahlen die Regelscharen zweiter Ordnung der Kongru K_1^3 zugeordnet. Bezeichnen wir die ∞^2 Strahlen und die ∞^2 Regelscha zweiter Ordnung von K_1^3 als die „Elemente“ der Kongruenz, so entsprec je zwei inzidenten ungleichartigen Elementen a', a' des zentrischen Bün S' zwei inzidente ungleichartige Elemente a, $\mathfrak{A}^2$ der Kongruenz K_1^3. Kongruenz K_1^3 ist demnach (**1.**) auf die sie erzeugenden kollinea zentrischen Bündel projektiv bezogen, sie liegt im Projektivitätsbere der Grundgebilde zweiter Stufe. Jeder Strahl von K_1^3 und die ihm sprechenden Ebenen der zu K_1^3 projektiven Bündel sind aber inzid folglich sind die zur Kongruenz K_1^3 projektiven Bündel zu ihr perspek

3. Vier Strahlen der Bisekantenkongruenz K_1^3 einer kubischen Ra kurve k^3, die aus einem Strahle a' eines zu K_1^3 perspektiven zentris Bündels durch vier harmonische Ebenen projiziert werden (**2.**), werden allen Strahlen der durch a' gehenden zu k^3 perspektiven Regelschar zwe Ordnung $\mathfrak{A}_0^2$ durch vier harmonische Ebenen projiziert; sie heißen „ harmonische Strahlen“[3]) der Kongruenz K_1^3. Die Strahlen von $\mathfrak{A}_0^2$ homologe Strahlen der zu K_1^3 perspektiven zentrischen Bündel.

---

[1]) v. Staudt, Geometrie der Lage, Nürnberg 1847, Nr. 121.

[2]) Jolles, Der Büschel kubischer Raumkurven und seine autokonjugierte K diese Zeitschrift 2 (1918), S. 318, Nr. 1.

[3]) Reye, Die Geometrie der Lage, zweite Abteilung, vierte Auflage, Stut 1907, S. 191.

Vier zu einer kubischen Raumkurve k^3 perspektive Regelscharen weiter Ordnung, die nach einem Punkte von k^3 vier harmonische Strahlen iner Ebene senden, senden nach jedem Punkte der Kurve solche Quarupel. Die Strahlen und Ebenen der Quadrupel sind homologe Elemente er zur Kongruenz K_1^3 perspektiven zentrischen Bündel und folglich mit inem Strahle p von K_1^3 inzident. Die Flächen der vier Regelscharen nd vier harmonische Flächen des durch die Kurve k^3 und ihre Biseante p gehenden F^2-Büschels. Durchläuft demnach eine Fläche diesen ^{2}-Büschel, so beschreiben die auf ihr gelegenen Unisekanten um die unkte der Kurve zum F^2-Büschel perspektive, also zueinander projektive trahlenbüschel erster Ordnung. Auf vier harmonischen Flächen des ^{2}-Büschels liegen „vier harmonische Regelscharen zweiter Ordnung" der ongruenz K_1^3, von denen zwei in Strahlenkegel zweiter Ordnung ausarten önnen. Die mit einem gegebenen Punkte $S^{(n)}$ von k^3 inzidenten Leiteraden von vier harmonischen Regelscharen zweiter Ordnung von K_1^3 reffen als vier harmonische Strahlen eines Büschels erster Ordnung jede egelschar zweiter Ordnung der Kongruenz, deren Träger mit den Flächen ner Regelscharen nicht im selben Büschel liegt, außer in $S^{(n)}$ noch in en Punkten von vier harmonischen Regelstrahlen. Die vier harmonischen lächen eines F^2-Büschels, dessen Elemente einscharig in K_1^3 enthalten nd, haben sonach mit jeder Regelschar zweiter Ordnung von K_1^3, deren räger nicht im F^2-Büschel enthalten ist, vier harmonische Strahlen gein. Hieraus läßt sich schließen:

Eine Regelschar bzw. ein Strahlenkegel zweiter Ordnung der Bisekantenkongruenz K_1^3 einer kubischen Raumkurve ist projektiv zu einem ^{2}-Büschel, dessen Flächen einscharig in K_1^3 enthalten sind, wenn jedem trahle s der Regelschar oder des Kegels die durch s gehende Büschelläche entspricht.

4. Zwei zu einer kubischen Raumkurve k^3 perspektive Strahlenkegel weiter Ordnung $S'(k^3)$ und $S''(k^3)$ bestimmen als homologe Gebilde wei kollineare zentrische Bündel $S'(a', \ldots, \alpha', \ldots)$ und $S''(a'', \ldots, \alpha'', \ldots)$. ie kollinearen Bündel sind zur Bisekantenkongruenz K_1^3 von k^3 perspektiv .), ihre homologen Strahlen a', a'' haben bzw. zu Polarebenen für die Kegel $'(k^3)$ und $S''(k^3)$ die homologen Ebenen π', π''. Diese Ebenen sind lglich mit einer Bisekante p von k^3 inzident. Fällt der Mittelpunkt s Bündels $S''(a'', \ldots, \alpha'', \ldots)$ nacheinander mit jedem Punkte der Kurve sammen, so beschreibt der Strahl a'' i. a. die durch a' gehende zu k^3 rspektive Regelschar zweiter Ordnung und seine Polarebene π'' den benenbüschel p. Kurz:

Durchläuft ein Strahl a'' eine zur kubischen Raumkurve k^3 per-

spektive Regelschar zweiter Ordnung, so bleiben seine Polarebenen π'' fü die zu k^3 perspektiven Strahlenkegel zweiter Ordnung mit einer Bis kante p der Kurve inzident. Jeder Strahl der Regelschar ist die Pola von p für einen solchen Kegel, jeder ihrer Leitstrahlen eine Bisekan von k^3, die p für alle diese Kegel konjugiert ist. Die Bisekante von k^3, welche einer Bisekante p der Kurve für alle zu k^3 perspektiv Strahlenkegel zweiter Ordnung konjugiert sind, bilden eine Regelsch zweiter Ordnung $\mathfrak{P}^2$. In $\mathfrak{P}^2$ liegen, wenn p eine wirkliche Bisekante i die Tangenten von k^3 in den Schnittpunkten mit p [4]). Die Regelsch $\mathfrak{P}^2$ wird zu dem Strahlenkegel, der die Kurve aus einem ihrer Punkte projiziert, wenn p die Tangente von k^3 in P ist.

$\mathfrak{P}^2$ kann jede Regelschar zweiter Ordnung von K_1^3 sein, p jed Kongruenzstrahl. Jede Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{P}^2$ von K_1^3 ist durch die kubische Raumkurve k^3 einem Kongruenzstrahle p zugeordn und jede durch p gehende Regelschar zweiter Ordnung der Kongrue einem Strahle von $\mathfrak{P}^2$. D. h.:

Zwischen den ungleichartigen Elementen (Strahlen und Regelschar zweiter Ordnung) der Bisekantenkongruenz einer kubischen Raumkur besteht eine polare Korrelation.

Die durch diese Korrelation einander zugeordneten Elemente bild die „polare Kongruenz" Π_1^3 von k^3. In ihr ist jedem Strahle p sei „Polarregelschar" $\mathfrak{P}^2$ zugeordnet und umgekehrt jeder Regelschar zwei Ordnung ihr „Polarstrahl". Für jede Tangente von k^3 wird die Pol regelschar „speziell", nämlich zu dem „Polarkegel", der k^3 aus dem B rührungspunkte der Tangente projiziert. Jede Tangente von k^3 liegt al auf ihrem Polarkegel, folglich sind die Tangenten von k^3 die „Inzide strahlen", die k^3 projizierenden Strahlenkegel zweiter Ordnung die „ zidenzkegel" der polaren Kongruenz von k^3.

Ebenso ist in der „polaren Kongruenz" Π_3^1 eines kubischen Eben gewindes $\varkappa^3$ jeder Biplanare p_b eine „Polarregelschar" $\mathfrak{P}_b^2$ zugeordnet u jeder Schmiegungsbiplanare ein „Polarstrahlenbüschel" zweiter Ordnu In ihm wird das Ebenengewinde von der Schmiegungsebene der Schm gungsbiplanare geschnitten. Die Schmiegungsbiplanaren liegen in ih Polarstrahlenbüscheln, sie sind also die „Inzidenzstrahlen", die zum winde perspektiven Strahlenbüschel zweiter Ordnung die „Inzidenzstrahl büschel" der polaren Kongruenz von $\varkappa^3$.

5. Vier harmonische Regelscharen zweiter Ordnung aus der B

[4]) Schröters Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkur dritter Ordnung, Leipzig 1880 enthält auf S. 267 einen unvollständigen Bew obiger Sätze; ihr vollständiger Beweis findet sich bei Reye, a. a. O., S. 192; bei Jolles, a. a. O., Nr. 7.

antenkongruenz einer kubischen Raumkurve k^3 senden nach einem gebenen Punkte P der Kurve vier harmonische Strahlen eines Büschels rster Ordnung (3.). Diesen vier harmonischen Strahlen ordnet der zu k^3 erspektive Strahlenkegel zweiter Ordnung $P(k^3)$ vier harmonische Ebenen iner Gerade als Polarebenen zu. Sie drehen sich, wenn der Punkt P die Kurve k^3 beschreibt, bzw. um die vier Strahlen, die den vier harmonischen Regelscharen in der polaren Kongruenz Π_1^3 von k^3 zugeordnet sind (4.).

In der polaren Kongruenz Π_1^3 einer kubischen Raumkurve haben ier harmonische Regelscharen zweiter Ordnung folglich vier harmonische Polarstrahlen.

6. Alle in der Kongruenz Π_1^3 der Bisekanten einer kubischen Raumkurve k^3 gelegenen Regelscharen zweiter Ordnung, die durch eine gegebene Bisekante gehen, bezeichnen wir als einen „Büschel von Regelscharen zweiter Ordnung" oder als einen „$\mathfrak{R}^2$-Büschel". Die mit den Punkten P von k^3 nzidenten Leitstrahlen der Regelscharen eines $\mathfrak{R}^2$-Büschels bilden zum Büschel perspektive, also zueinander projektive Strahlenbüschel erster Ordnung (3.). Jeder solcher Strahlenbüschel P ist projektiv zum Ebenenbüschel erster Ordnung, den die Polarebenen seiner Strahlen für den von einem Mittelpunkte ausgehenden Strahlenkegel zweiter Ordnung $P(k^3)$ bilden. Folglich sind diese Ebenenbüschel zum $\mathfrak{R}^2$-Büschel, also auch zueinander, projektiv. Ihre homologen Ebenen enthalten die Polarstrahlen der ihnen entsprechenden Regelscharen (4.). Somit ergibt sich:

In der polaren Kongruenz Π_1^3 der Bisekanten einer kubischen Raumkurve bilden die Polarstrahlen der Regelscharen eines $\mathfrak{R}^2$-Büschels eine zum Büschel projektive Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{P}^2$; sie ist die Polarregelschar des gemeinsamen Strahles p aller Regelscharen des $\mathfrak{R}^2$-Büschels.

7. Ein Strahl p der polaren Bisekantenkongruenz Π_1^3 einer kubischen Raumkurve k^3 und jeder Strahl seiner Polarregelschar $\mathfrak{P}^2$ sind „konjugierte Strahlen" von Π_1^3; ferner sind in Π_1^3 eine Regelschar $\mathfrak{P}^2$ und jede mit ihrem Polarstrahle p inzidente Regelschar zweiter Ordnung „konjugierte Regelscharen zweiter Ordnung" der polaren Kongruenz. Von zwei konjugierten Strahlen von Π_1^3 liegt jeder in der Polarregelschar des andern, von zwei konjugierten Regelscharen zweiter Ordnung von Π_1^3 geht jede durch den Polarstrahl der andern. Konjugierte Strahlen von Π_1^3 sind windschief; nur dann wenn einer von ihnen k^3 berührt, schneiden sie sich in Berührungspunkte dieses Strahles. Jede Tangente von k^3 ist in Π_1^3 sich selbst konjugiert[5]). Enthält eine Regelschar $\mathfrak{P}^2$ von Π_1^3 zwei reelle Tangenten von k^3, so verbindet ihr Polarstrahl deren Berührungspunkte,

[5]) Reye, a. a. O., S. 192.

er ist eine wirkliche Bisekante der Kurve. Der Polarstrahl von $\mathfrak{P}^2$ i
eine virtuelle Bisekante von k^3, wenn $\mathfrak{P}^2$ keine reellen Tangenten von
enthält. Im ersten Falle paaren die Strahlen von $\mathfrak{P}^2$ die Punkte von
hyperbolisch involutorisch, im zweiten elliptisch involutorisch. Die Pola
regelscharen $\mathfrak{P}^2$, $\mathfrak{Q}^2$ zweier konjugierten Strahlen p, q von Π_1^3 sind ko
jugiert; sie haben einen zu p und q konjugierten Kongruenzstrahl r gemei
dessen Polarregelschar ebenfalls zu $\mathfrak{P}^2$ und $\mathfrak{Q}^2$ konjugiert ist. Die d
paarweise konjugierten Strahlen p, q, r bilden die Strahlen eines „Pola
tripels" der polaren Bisekantenkongruenz Π_1^3, ihre Polarregelscharen sei
Regelscharen. Ein Polartripel von Π_1^3 ist durch zwei seiner Strahlen od
Regelscharen bestimmt. Sind zwei konjugierte Strahlen der polaren Ko
gruenz von k^3 wirkliche Bisekanten der Kurve, so schneiden sie k^3
zwei sich harmonisch trennenden Punktepaaren. Zu zwei sich trennend
Punktepaaren von k^3 kann aber ein drittes Punktepaar niemals harmonis
sein; ein Strahl eines Polartripels von Π_1^3 ist folglich eine virtuelle, jed
der beiden anderen Strahlen eine wirkliche Bisekante der Kurve[6]).

Aus einem Punkte S' von k^3 wird jede Bisekante p der Kurve dur
eine Ebene π' projiziert, die Polarregelschar $\mathfrak{P}^2$ von p durch einen Ebene
büschel p'. Zwischen den Ebenen π' und den Strahlen p' des zentrisch
Bündels S' besteht eine polare Korrelation.

*Die polare Kongruenz Π_1^3 der Bisekanten von k^3 wird also a
jedem Punkte der Kurve durch einen polaren zentrischen Bündel p
jiziert; konjugierte Strahlen von Π_1^3 liegen in konjugierten Ebenen, Pol
tripel von Π_1^3 in Polardreikanten des polaren Bündels.*

Analoges gilt für die polare Kongruenz der Biplanaren eines kubisch
Ebenengewindes und für die polaren ebenen Felder, in denen sie von sein
Ebenen geschnitten wird.

8. Durchläuft der Strahl q eines Polartripels p, q, r in der polaren Bi
kantenkongruenz Π_1^3 einer kubischen Raumkurve k^3 die Polarregelschar
der Bisekante p von k^3, so durchläuft seine Polarregelschar $\mathfrak{Q}^2$ einen
$\mathfrak{P}^2$ projektiven $\mathfrak{R}^2$-Büschel (6.). Die Regelschar $\mathfrak{P}^2$ ist nochmals auf d
$\mathfrak{R}^2$-Büschel projektiv bezogen, wenn jeder Regelschar $\mathfrak{Q}^2$ ihr Schni
strahl r mit $\mathfrak{P}^2$ entspricht (3.). Nun geht die Polarregelschar $\mathfrak{R}^2$ vo
durch q, folglich liegen die beiden von q und r beschriebenen projektiv
Regelscharen involutorisch. Da aber die Strahlen q, r in Π_1^3 konjugi
sind, so gil

*In der polaren Bisekantenkongruenz Π_1^3 einer kubischen Raumku
bilden die in einer Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{P}^2$ gelegenen konjugier*

---

[6]) Reye, a. a. O., S. 192.

trahlen und die durch den Polarstrahl p von $\mathfrak{P}^2$ gehenden konjugierten Regelscharen zweiter Ordnung zueinander perspektive Involutionen.

9. Die wirklichen Bisekanten einer kubischen Raumkurve k^3, die in iner Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{P}^2$ liegen, paaren die Punkte von k^3 nvolutorisch. Die involutorische Kurve bestimmt einen sie enthaltenden eschart involutorischen Raum Σ_{gp}[7]) und die lineare Kongruenz K^1_{1p} seiner Doppelstrahlen. Die Kongruenz K^1_{1p} geht durch die Regelschar $\mathfrak{P}^2$, der eschart involutorische Raum Σ_{gp} auch noch durch die zur involutorischen Kurve k^3 perspektive involutorische Leitschar von $\mathfrak{P}^2$. Aus je zwei in Σ_{gp} inander zugeordneten Punkten A, A_1 von k^3 wird die Kurve durch je wei homologe Strahlenkegel zweiter Ordnung $A(k^3)$ und $A_1(k^3)$ von Σ_{gp} rojiziert. Die mit A und A_1 inzidenten in Σ_{gp} einander zugeordneten eitstrahlen von $\mathfrak{P}^2$ haben also für diese Kegel Polarebenen, die in Σ_{gp} inander zugeordnet sind und sich folglich in einem Strahle p von K^1_{1p} chneiden; p ist aber der Polarstrahl von $\mathfrak{P}^2$. Kurz:

Eine Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{P}^2$ der polaren Bisekantenkongruenz iner kubischen Raumkurve k^3 und der Polarstrahl p von $\mathfrak{P}^2$ liegen in iner linearen Kongruenz K^1_{1p}, welche die Punkte von k^3 paarweise einnder zuordnet.

Paaren die in $\mathfrak{P}^2$ enthaltenen wirklichen Bisekanten von k^3 die Punkte er Kurve hyperbolisch involutorisch, so sind die bzw. durch die Doppelunkte U_p, V_p der Involution gehenden Leitgeraden u_p, v_p von $\mathfrak{P}^2$ zugleich ie Leitgeraden der Kongruenz K^1_{1p}; diese ist hyperbolisch. Die Doppelunkte U_p, V_p und die sich in ihnen der Kurve anschmiegenden Ebenen nd durch K^1_{1p} sich selbst zugeordnet. Die Leitgeraden u_p, v_p fallen also it zwei Schmiegungsstrahlen von k^3 zusammen, und der Polarstrahl p von ^{2} verbindet die Doppelpunkte U_p, V_p (**7.**). Ein Strahl jedes Polartripels der polaren Bisekantenkongruenz Π^3_1 von k^3 ist eine virtuelle, jeder er beiden anderen Strahlen eine wirkliche Bisekante der Kurve (**8.**). ie Polarregelschar einer virtuellen Bisekante von k^3 enthält sonach nur irkliche Bisekanten, die Polarregelschar einer wirklichen Bisekante wirkhe und virtuelle. Jedes Paar konjugierter Strahlen von Π^3_1, das in der olarregelschar einer wirklichen Bisekante der Kurve liegt, besteht aus ner wirklichen und einer virtuellen Bisekante.

10. Ist in der polaren Bisekantenkongruenz Π^3_1 der kubischen Raumirve k^3 dem Strahle p die Polarregelschar $\mathfrak{P}^2$ zugeordnet, und ist K^1_{1p} e p und $\mathfrak{P}^2$ verbindende lineare Kongruenz, so schmiegen sich an k^3 je zwei durch K^1_{1p} einander zugeordneten Punkten (**9.**) zwei durch K^1_{1p}

[7]) v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, Nürnberg 1860, Nr. 494.

einander zugeordnete Ebenen; sie sind mit zwei einander zugeordnet Punkten des Kongruenzstrahles p inzident. Je zwei durch K^1_{1p} einand zugeordnete Punkte sind aber für alle in der Kongruenz einscharig e haltenen Flächen zweiter Ordnung konjugiert[8]), und die Regelschar zwei Ordnung $\mathfrak{P}^2$ liegt in K^1_{1p}, folglich sind je zwei durch K^1_{1p} einander geordnete Punkte der Bisekante p für die durch k^3 gehende Fläc von $\mathfrak{P}^2$ konjugiert, somit auch für k^3 selbst. Also:

Die Schmiegungsebenen einer kubischen Raumkurve k^3 in den Schn punkten mit einer wirklichen Bisekante p treffen den Polarstrahl je durch p gehenden Regelschar zweiter Ordnung der polaren Bisekant kongruenz von k^3 in zwei für k^3 konjugierten Punkten. Je zwei Schm gungsebenen von k^3 schneiden jeden Strahl von Π^3_1, der zum Verbindun strahle ihrer Schmiegungspunkte konjugiert ist, in zwei für die Ku konjugierten Punkten[9]).

II. Der Nullraum der Raumkurve dritten Grades und die polaren Kongruenzen ihrer Bisekanten und Biplanaren.

11. Eine Raumkurve dritten Grades $\mathfrak{k}^3$ bestimmt eine polare K gruenz Π^3_1 ihrer Bisekanten, eine polare Kongruenz Π^1_3 ihrer Biplana und als Nullkurve einen Nullraum N. In N ist jedem Punkte von seine Schmiegungsebene zugeordnet, jeder Bisekante p von $\mathfrak{k}^3$ eine Biplan p_b der Kurve, jeder Bisekante p und ihrer Polarregelschar $\mathfrak{P}^2$ von eine Biplanare p_b und ihre Polarregelschar $\mathfrak{P}^2_b$ von Π^1_3. Je zwei k jugierten Strahlen und jedem Polartripel von Π^3_1 entsprechen je z konjugierte Strahlen und ein Polartripel von $\Pi_3{}^1$.

Die wirklichen Bisekanten in der Polarregelschar $\mathfrak{P}^2$ einer Bisekant von $\mathfrak{k}^3$ paaren die Punkte der Kurve involutorisch. Die involutoris Kurve bestimmt den sie enthaltenden geschart involutorischen Raum Σ dessen lineare Kongruenz K^1_{1p} den Strahl p von Π^3_1 mit seiner Po regelschar $\mathfrak{P}^2$ verbindet (**9.**). Denselben geschart involutorischen Ra bestimmt das sich der involutorischen Kurve anschmiegende zu ihr p spektive involutorische Ebenengewinde. Das Ebenengewinde ist der Kurv in ihrem Nullraume N zugeordnet, folglich ist der geschart involutoris Raum Σ_{gp} für die Korrelation von N invariant. Die Bisekante p vo und ihre Polarregelschar $\mathfrak{P}^2$ gehen durch die Korrelation von N in Biplanare p_b und ihre Polarregelschar $\mathfrak{P}^2_b$ über, die ebenfalls in der linea

---

[8]) v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, 1856, Nr. 105.
[9]) Reye, a. a. O., S. 193.

ongruenz K^1_{1p} von Σ_{gp} liegen. K^1_{1p} ist somit sowohl durch p und $\mathfrak{P}^2$ ie auch durch p_b und $\mathfrak{P}^2_b$ bestimmt. Kurz:

Sind im Nullraume N einer Raumkurve dritten Grades $\mathfrak{k}^3$ eine Bikante p von $\mathfrak{k}^3$ und ihre Polarregelschar $\mathfrak{P}^2$ der Biplanare p_b und ihrer olarregelschar $\mathfrak{P}^2_b$ zugeordnet, so verbindet dieselbe lineare Kongruenz K^1_{1p} owohl p und $\mathfrak{P}^2$ als auch p_b und $\mathfrak{P}^2_b$. Die Kongruenz K^1_{1p} ist im Nullaume N sich selbst zugeordnet; sie hat, wenn sie hyperbolisch ist, zwei ullstrahlen von N, die zugleich Schmiegungsstrahlen von $\mathfrak{k}^3$ sind, zu eitgeraden.

12. Die Kurve dritten Grades $\mathfrak{k}^3$ hat in ihren beiden Schnittpunkten , A_1 mit einer wirklichen Bisekante x aus der Polarregelschar $\mathfrak{P}^2$ der isekante p zwei Schmiegungsebenen α, α_1, die p bzw. in zwei für $\mathfrak{k}^3$ onjugierten Punkten P, P_1 schneiden (10.). Den Punkten des Schmieungsstrahles $AP = s$ sind also für $\mathfrak{k}^3$ die Punkte des Schmiegungsstrahles $_1P_1 = s_1$ konjugiert, und die Schmiegungsstrahlen s, s_1 sind demnach ls „assoziierte“ Schmiegungsstrahlen[10]) der Kurve wechselseitig mit den angenten a, a_1 in den Kurvenpunkten A, A_1 inzident. Im Punkte A at folglich die Fläche P^2 der Regelschar $\mathfrak{P}^2$ eine durch s_1 gehende Beührungsebene α_A, und der mit α_A inzidente Punkt P_1 für P^2 eine mit inzidente Polarebene. In dieser liegt der P_1 für $\mathfrak{k}^3$ konjugierte Punkt P, omit schneiden sich in s die Polarebenen der Punkte A_1 und P_1. Die ssoziierten Schmiegungsstrahlen s, s_1 sind hiernach reziproke Polaren für ie Fläche P^2. Da sie die Bisekante p treffen und Nullstrahlen des ullraumes N von $\mathfrak{k}^3$ sind, so treffen sie auch die p in N zugeordnete iplanare p_b. Für die Fläche P^2_b der $\mathfrak{P}^2$ in N zugeordneten Polarregelhar $\mathfrak{P}^2_b$ sind sie ebenfalls reziprok polar. Kurz, es folgt, wenn die Bikante x nacheinander mit allen wirklichen Bisekanten von $\mathfrak{k}^3$, die in $\mathfrak{P}^2$ egen, zusammenfällt:

Alle Schmiegungsstrahlen einer Raumkurve dritten Grades $\mathfrak{k}^3$, die mit iner Bisekante p von $\mathfrak{k}^3$ und mit der ihr im Nullraume N von $\mathfrak{k}^3$ zugeordneten iplanare p_b inzident sind, sind paarweise für $\mathfrak{k}^3$ assoziiert und gleichzeitig ür die Flächen P^2 und P^2_b der Polarregelscharen $\mathfrak{P}^2$ und $\mathfrak{P}^2_b$ von p und $_b$ reziprok polar[11]). Für P^2 und P^2_b sind auch p und p_b reziprok olar[12]). Der Nullpunkt P einer gegebenen Ebene π von p_b im Null-

[10]) Cremona, Mémoire de géométrie pure sur les cubiques gauches, Nouvelles nnales de Mathématiques, 2. Série, Bd. 1 (1862), S. 298.

[11]) Jolles, Zur synthetischen Theorie der Raumkurven III. Grades $\mathfrak{k}^3$ und der ongruenz C^3_3 ihrer Schmiegungsstrahlen, Journ. f. d. reine u. angew. Math., Bd. 130 905), Nr. 8.

[12]) Cremona, a. a. O., S. 367.

raume N ist zugleich der Pol von p_b für den Kegelschnitt, den π r der Polarregelschar $\mathfrak{P}^2$ gemein hat. Die Schmiegungspunkte je zwe assoziierten Schmiegungsstrahlen von $\mathfrak{k}^3$, die mit p und p_b inzident sin liegen auf einer in $\mathfrak{P}^2$ enthaltenen wirklichen Bisekante x von $\mathfrak{k}^3$, i Schmiegungsebenen schneiden sich in der x im Nullraume N zugeordne Biplanare x_b der Kurve. Jede in $\mathfrak{P}^2$ gelegene wirkliche Bisekante von schneidet die Kurve in zwei Punkten, die aus p_b durch zwei für $\mathfrak{k}^3$ ko jugierte Ebenen projiziert werden; jede in $\mathfrak{P}_b^2$ enthaltene wirkliche planare ist mit zwei Schmiegungsebenen von $\mathfrak{k}^3$ inzident, die p in zw für $\mathfrak{k}^3$ konjugierten Punkten schneiden.

13. Durch die lineare Kongruenz K_{1p}^1, welche die Bisekante p ei Raumkurve dritten Grades $\mathfrak{k}^3$ mit ihrer Polarregelschar $\mathfrak{P}^2$ verbindet, s die Punkte und Schmiegungsebenen von $\mathfrak{k}^3$ paarweise einander zugeord (**9.**). Die Schmiegungsebenen α, α_1 in je zwei einander zugeordne Punkten A, A_1 von $\mathfrak{k}^3$ schneiden den Kongruenzstrahl p in zwei du K_{1p}^1 einander zugeordneten Punkten, folglich sind die mit p und bzw. A, inzidenten Schmiegungsstrahlen s, s_1 von $\mathfrak{k}^3$ ebenfalls durch K_{1p}^1 einan zugeordnet. Je zwei solcher Schmiegungsstrahlen s, s_1 sind aber as ziiert (**12.**), da ihre Schmiegungspunkte A, A_1 durch Strahlen der Regelsc $\mathfrak{P}^2$ verbunden werden. Also schließen wir:

Die lineare Kongruenz K_{1p}^1, welche die Bisekante p einer Rau kurve dritten Grades $\mathfrak{k}^3$ mit ihrer Polarregelschar $\mathfrak{P}^2$ verbindet, ordnet zwei assoziierte mit p inzidente Schmiegungsstrahlen von $\mathfrak{k}^3$ einander

In K_{1p}^1 liegt die p im Nullraume N von $\mathfrak{k}^3$ zugeordnete Biplanare der Kurve sowie ihre Polarregelschar $\mathfrak{P}_b^2$, und die mit p inziden Schmiegungsstrahlen von $\mathfrak{k}^3$ sind auch mit p_b inzident. Da je zwei du K_{1p}^1 einander zugeordnete Punkte und Ebenen der Kongruenzstrahle und p_b für alle einscharig in K_{1p}^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordn konjugiert sind, so folgt:

Sind im Nullraume N einer Raumkurve dritten Grades $\mathfrak{k}^3$ die sekante p und die Biplanare p_b von $\mathfrak{k}^3$ einander zugeordnet, so rufen Flächen ihrer Polarregelscharen $\mathfrak{P}^2$ und $\mathfrak{P}_b^2$ in p und p_b dieselben volutionen konjugierter Punkte und Ebenen hervor. Je zwei dieser k jugierten Elemente sind durch die lineare Kongruenz K_{1p}^1 einander geordnet.

14. Die Bisekante p und die ihr im Nullraume N der Raumku dritten Grades $\mathfrak{k}^3$ zugeordnete Biplanare p_b sind reziprok polar für Fläche P^2 der Polarregelschar $\mathfrak{P}^2$ von p (**12.**). Eine gegebene Eben von p schneidet also P^2 in einem Kegelschnitte p^2, der p_b den π

Nullraume N zugeordneten Punkt $p\pi = P$ als Pol zuweist. Hat π mit er Kurve $\mathfrak{k}^3$ drei reelle Punkte A, B, C gemein, so treffen die von P ach den Ecken des Dreiecks ABC gehenden Nullstrahlen a, b, c die den cken A, B, C gegenüberliegenden Dreiecksseiten in den Punkten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$. ie von diesen Punkten durch die Punktepaare B, C; C, A; A, B harnonisch getrennten Punkte $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1$ liegen auf der Polare p_{ABC} von P ir das Dreieck ABC. Für $\mathfrak{k}^3$ sind den Punkten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ bzw. die Punkte $_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1$ konjugiert, folglich sind diese bzw. mit den Schmiegungsstrahlen a_1, b_1, c_1 inzident, die den Schmiegungsstrahlen a, b, c für $\mathfrak{k}^3$ ssoziiert sind (12.). a_1, b_1, c_1 schneiden aber die Biplanare p_b; die Biplanare p_b und die Polare p_{ABC} sind somit identisch. D. h.:

Hat eine Ebene π mit der Raumkurve dritten Grades $\mathfrak{k}^3$ drei reelle Punkte A, B, C gemein, so ist der Nullpunkt P von π im Nullraume von $\mathfrak{k}^3$ der Pol der mit π inzidenten Biplanare p_b von $\mathfrak{k}^3$ für das Dreieck ABC [13]).

15. Im Nullraume einer Raumkurve dritten Grades $\mathfrak{k}^3$ sei P der Nullpunkt einer Ebene π, und diese schneide die Polarregelschar $\mathfrak{P}^2$ iner Bisekante p von $\mathfrak{k}^3$ im Kegelschnitte p^2. Hat π mit $\mathfrak{k}^3$ drei reelle unkte A, B, C gemein, so ist P der Pol der mit π inzidenten Biplanare p_b von $\mathfrak{k}^3$ sowohl für das Dreieck ABC (14.) wie für den Kegelchnitt p^2 (12.). Für p^2 sind die mit π und A, B, C bzw. inzidenten chmiegungsstrahlen a, b, c die Polaren der Punkte $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1$, in denen $_b$ die den Ecken A, B, C gegenüberliegenden Dreiecksseiten BC, CA, AB chneidet. a, b, c treffen also p^2 in Punktepaaren, die bzw. die Punkte $, C$; C, A; A, B harmonisch trennen.

Die mit der Ebene π und ihrem Nullpunkte P inzidenten Schmiegungsstrahlen a, b, c haben zu Polaren für P^2 die a, b, c für $\mathfrak{k}^3$ assoziierten chmiegungsstrahlen a_1, b_1, c_1 (12.). Diese gehen bzw. durch die Punkte $_1, B_1, C_1$ der Kurve, schneiden sich, da p und p_b für P^2 reziprok polar nd, in dem mit p inzidenten Pole P_1 von π für P^2 und liegen in der it p_b inzidenten Polarebene π_1 von P. Für die Fläche der Polarregelchar $\mathfrak{P}_b^2$ von p_b sind π, π_1 konjugiert (13.), folglich auch für die Kurve $\mathfrak{k}^3$. ls assoziierte Schmiegungsstrahlen von $\mathfrak{k}^3$ sind a, a_1 Leitstrahlen der olarregelschar $\mathfrak{X}^2$ der Bisekante $AA_1 = x$. Die in $\mathfrak{X}^2$ enthaltenen irklichen Bisekanten von $\mathfrak{k}^3$ schneiden die Kurve in den Punktepaaren ner hyper olischen Involution mit den Doppelpunkten A, A_1. Von den unkten A, A_1 wird somit das Punktepaar B, C harmonisch getrennt,

[13]) Cremona, Sul'e linee del terz' ordine a doppia curvatura, Annali di Matematica, 1. Serie, Bd. 2 (1859), S. 21. — Jolles, a. a. O., Nr. 3.

ebenso von B, B_1 und C, C_1 bzw. das Punktepaar C, A und A, B. N
geht die Polarregelschar $\mathfrak{X}^2$ der Bisekante x durch p, desgleichen
Polarregelschar $\mathfrak{Y}^2$ von $BB_1 = y$ und die Polarregelschar $\mathfrak{Z}^2$ von $CC_1 =$
Die drei Bisekanten x, y, z sind folglich in der Polarregelschar $\mathfrak{P}^2$ v
p enthalten. Kurz:

Schneidet eine Ebene π die Raumkurve dritten Grades $\mathfrak{k}^3$ in d
reellen Punkten A, B, C, so hat auch die π für $\mathfrak{k}^3$ konjugierte Ebene
mit der Kurve drei reelle Punkte A_1, B_1, C_1 gemein. A_1, B_1, C_1 si
durch die drei harmonischen Punktwürfe ABA_1C, BCB_1A, CAC
bestimmt[14]*). Die drei Bisekanten $AA_1 = x$, $BB_1 = y$, $CC_1 = z$ lieg*
in der Polarregelschar $\mathfrak{P}^2$ der Bisekante p, die mit den Nullpunkt
von π, π_1 im Nullraume von $\mathfrak{k}^3$ inzident ist. Die Polarregelscharen $\mathfrak{X}^2$,
und $\mathfrak{Z}^2$ der Bisekanten x, y, z haben die mit den Ebenen π, π_1 und
den Punkten A, A_1; B, B_1; C, C_1 bzw. inzidenten Schmiegungsstrahl
a, a_1; b, b_1; c, c_1 von $\mathfrak{k}^3$ bzw. zu Leitstrahlen.

16. Der Nullpunkt P einer Ebene π im Nullraume N einer Rau
kurve dritten Grades $\mathfrak{k}^3$, die mit $\mathfrak{k}^3$ drei reelle Punkte A, B, C gem
hat, ist für das Dreieck ABC der Pol der mit π inzidenten Biplanare
der Kurve (**14.**). Durch P geht die p_b im Nullraume N zugeordn
Bisekante p. Für den Kegelschnitt p^2, den π mit der Polarregelschar
von p gemein hat, ist P der Pol von p_b (**12.**). Endlich ist P das
volutionszentrum einer auf p^2 gelegenen elliptischen Punktinvolution
und liegt somit im Innern des Kegelschnittes. Die Biplanare p_b hat a
mit p^2 und der zu p^2 perspektiven Regelschar $\mathfrak{P}^2$ keinen reellen Punkt
mein. Für die Fläche von $\mathfrak{P}^2$ sind aber p und p_b reziproke Polaren (1
folglich ist p eine virtuelle Bisekante und p_b eine virtuelle Biplanare
$\mathfrak{k}^3$. Oder:

Die in einer Ebene π gelegene Biplanare p_b einer Raumkurve drit
Grades $\mathfrak{k}^3$ ist eine virtuelle, wenn $\mathfrak{k}^3$ mit π drei reelle Punkte gemein
Eine wirkliche Bisekante der Kurve $\mathfrak{k}^3$ ist nur mit virtuellen Biplana
von $\mathfrak{k}^3$ inzident[16]*).*

17. Ist p_b die virtuelle Biplanare einer Raumkurve dritten Grades
die mit der Ebene π dreier reellen Punkte A, B, C von $\mathfrak{k}^3$ inzident ist (1
so schneiden die Ebenen von p_b die Kurve $\mathfrak{k}^3$ in den Tripeln einer ter

---

[14]) v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, 1860, Nr. 499.

[15]) v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, 1857, Nr. 285.

[16]) Cremona, Sulle linee del terz' ordine a doppia curvatura, Annali di M
matica, 1. Serie, Bd. 1 (1858), S. 167.

yklischen Punktreihe[17]). In der π für $\mathfrak{k}^3$ konjugierten Ebene π_1 liegt in Tripel A_1, B_1, C_1 der Punktreihe. Es bestimmt mit dem Tripel A, B, C rei Strahlen $AA_1 = x$, $BB_1 = y$, $CC_1 = z$ der Polarregelschar $\mathfrak{P}^2$ der $_b$ im Nullraume N von $\mathfrak{k}^3$ zugeordneten Bisekante p (15.). Die ternär yklische Punktreihe auf der Raumkurve $\mathfrak{k}^3$ bestimmt einen sie enthaltenden chsialen ternär zyklischen Raum Σ_{tp}, in dem die Regelschar $\mathfrak{P}^2$ sich selbst ugeordnet ist. Die wirklichen Bisekanten von $\mathfrak{k}^3$ in dieser Regelschar chneiden die Kurve in Punktepaaren einer Involution; die Projektivität ieser Involution führt die ternär zyklische Punktreihe auf $\mathfrak{k}^3$ in sich selbst ber. Somit gilt:

Die ternär zyklische Punktreihe auf einer Raumkurve dritten Grades $\mathfrak{k}^3$, eren Tripel von den Ebenen einer virtuellen Biplanare p_b der Kurve usgeschnitten werden, ist für die Projektivität einer Punktinvolution in- ariant, deren Punktepaare auf den Strahlen der Polarregelschar $\mathfrak{P}^2$ der $_b$ im Nullraume N von $\mathfrak{k}^3$ zugeordneten Bisekante p liegen. In dem durch ie ternär zyklische Kurve bestimmten achsialen ternär zyklischen Raume $_{tp}$ sind die Strahlen von $\mathfrak{P}^2$ zu Tripeln geordnet. Jedes dieser Strahlen- ripel verbindet zwei Punktetripel von $\mathfrak{k}^3$, die in je zwei für $\mathfrak{k}^3$ konjugierten benen von p_b enthalten sind. Der achsiale ternär zyklische Raum Σ_{tp} t sich selbst zugeordnet im Nullraume N sowie im geschart involuto- ischen Raume Σ_{gp} der linearen Kongruenz K^1_{1p}, in der die Strahlen p, p_b nd ihre Polarregelscharen liegen.

Die Ebenen von p_b sind die Deckebenen, die Punkte von p die Deck- unkte des ternär zyklischen Raumes Σ_{tp}. Jedes ternär zyklische Feld at die Deckgerade p_b; seine Ebene schneidet p in dem Deckpunkte des eldes und die in Σ_{tp} enthaltene Regelschar $\mathfrak{P}^2$ in einem ternär zyklischen egelschnitte dieses Raumes.

18. Haben die Ebenen π, π_1 mit einer Raumkurve dritten Grades $\mathfrak{k}^3$ zw. die reellen Punkte A, B, C und A_1, B_1, C_1 gemein, so geht durch iese Tripel eine auf $\mathfrak{k}^3$ gelegene ternär zyklische Punktreihe. Die Punkt- ihe bestimmt einen sie enthaltenden achsialen ternär zyklischen Raum $_{tp}$; seine Deckebenen sind mit der Schnittgerade p_b von π, π_1 inzident, ine Deckpunkte mit dem p_b im Nullraume N von $\mathfrak{k}^3$ zugeordneten Strahle (17.). Der Strahl p_b ist eine virtuelle Biplanare, der Strahl p eine irtuelle Bisekante von $\mathfrak{k}^3$. Die Ebenen π, π_1 schneiden die Polarregel- har $\mathfrak{P}^2$ von p in zwei in Σ_{tp} enthaltenen Kegelschnitten p^2, p_1^2. Somit ird aus dem Schnittpunkte P von p und π das Tripel A, B, C durch die

[17]) Reye, Die Geometrie der Lage, zweite Abteilung, dritte Auflage, Leipzig 392, S. 208.

mit π inzidenten Schmiegungsstrahlen a, b, c von $\mathfrak{k}^3$ in das Tripel A B^π, C^π von p^2 projiziert, und analog aus dem Schnittpunkte P_1 von p und das Tripel A_1, B_1, C_1 in das Tripel $A_1^\pi, B_1^\pi, C_1^\pi$ von p_1^2. Werden nu mehr die Ebenen π, π_1 als konjugiert für $\mathfrak{k}^3$ angenommen, so bild die Strahlen $A^\pi A_1^\pi = x^\pi$, $B^\pi B_1^\pi = y^\pi$, $C^\pi C_1^\pi = z^\pi$ ein in $\mathfrak{P}^2$ enthalten Strahlentripel von Σ_{tp} (17.). Als solches haben seine Strahlen $x^\pi, y^\pi,$ bzw. die Punktepaare K, K_1; L, L_1; M, M_1 mit $\mathfrak{k}^3$ gemein, die in zw für $\mathfrak{k}^3$ konjugierten Ebenen ϱ, ϱ_1 von p_b zwei Punktetripel K, L, M u K_1, L_1, M_1 von Σ_{tp} bilden. In der virtuellen Biplanare p_b rufen n die Kurve $\mathfrak{k}^3$ und die Fläche der Regelschar $\mathfrak{P}^2$ dieselbe Involution ko jugierter Ebenen hervor (13.). Von diesen projiziert das Ebenenpaar $\varrho,$ die auf den Strahlen des Tripels x^π, y^π, z^π bzw. gelegenen Punktepaa K, K_1; L, L_1; M, M_1 von $\mathfrak{k}^3$ und das Ebenenpaar π, π_1 bzw. die für konjugierten, und folglich durch jene Punktepaare bzw. harmonisch trennten Punktepaare A^π, A_1^π; B^π, B_1^π; C^π, C_1^π. Nun sind die Strahl x^π, y^π, z^π bzw. Strahlen der Polarregelscharen $\mathfrak{X}^2, \mathfrak{Y}^2, \mathfrak{Z}^2$ der Bisekant $AA_1 = x$, $BB_1 = y$, $CC_1 = z$ (4.). Folglich sind in der polaren sekantenkongruenz Π_1^3 von $\mathfrak{k}^3$ die Strahlen x, x^π sowie y, y^π und $z,$ konjugiert. Also läßt sich schließen:

Bilden in der Polarregelschar $\mathfrak{P}^2$ der Bisekante p einer Raumkur dritten Grades $\mathfrak{k}^3$ die Strahlen x, y, z ein Strahlentripel des achsialen tern zyklischen Raumes Σ_{tp} (17.), so bilden die in der polaren Kongruenz Π_1^3 v $\mathfrak{k}^3$ ihnen bzw. konjugierten Strahlen x^π, y^π, z^π gleichfalls ein solches Trip Jedes von beiden Strahlentripeln schneidet die Kurve in einem Pa Punktetripeln von Σ_{tp}. Das eine Tripelpaar wird von einem Ebenenpa π, π_1, das andere von einem Ebenenpaar ϱ, ϱ_1 der p im Nullraume $\mathfrak{k}^3$ zugeordneten Biplanare p_b getragen. π, π_1 ebenso wie ϱ, ϱ_1 sind für konjugiert, und beide Ebenenpaare trennen sich harmonisch[18]).

Die Strahlen der Tripel x, y, z und x^π, y^π, z^π haben mit dem Keg schnitte p^2, in dem die Ebene π die Regelschar $\mathfrak{P}^2$ schneidet, bzw. die Punk A, B, C und A^π, B^π, C^π gemein. Die Punktwürfe $ABA^\pi C$, $BCB^\pi A$ u $CAC^\pi B$ sind aber harmonisch (15.), also sind es auch die Strahlenwü $xyx^\pi z$, $yzy^\pi x$ und $zxz^\pi y$.

19. Von den drei Strahlen p, q, r eines Polartripels in der pola Kongruenz Π_1^3 der Bisekanten einer Raumkurve dritten Grades $\mathfrak{k}^3$ s zwei — etwa p und q — wirkliche Bisekanten (7.). Die linearen K gruenzen K_{1p}^1 und K_{1q}^1, welche die Bisekanten p, q mit ihren Polarreg scharen verbinden, sind somit hyperbolisch und haben als Leitgeraden z

[18]) Jolles, a. a. O., Nr. 9.

Schmiegungsstrahlen u_p, v_p bzw. u_q, v_q von $\mathfrak{k}^3$ (9.). Die Schmiegungsstrahlen u_p, v_p sind für $\mathfrak{k}^3$ assoziiert, ebenso die Schmiegungsstrahlen u_q, v_q. Sie schneiden die drei Strahlen des Polartripels, und sind folglich Leitstrahlen der Regelschar zweiter Ordnung pqr. Als konjugierte Strahlen der polaren Kongruenz Π_1^3 schneiden die Bisekanten p, q die Kurve in zwei Punktepaaren, die sich harmonisch trennen. In der Leitschar der Regelschar pqr sind also die Strahlen u_p, v_p durch die Strahlen u_q, v_q harmonisch getrennt. Alle vier sind Nullstrahlen im Nullraume N von $\mathfrak{k}^3$, somit sind alle Leitstrahlen der Regelschar pqr Nullstrahlen von N, und die Strahlen der Regelschar selbst sind in N paarweise einander zugeordnet. Die Regelschar $p\,q\,r$ enthält folglich das dem Polartripel p, q, r von Π_1^3 in N zugeordnete Polartripel p_b, q_b, r_b der polaren Kongruenz Π_3^1 der Biplanaren von $\mathfrak{k}^3$[19]). Kurz:

Die Strahlen eines Polartripels p, q, r aus der polaren Bisekantenkongruenz Π_1^3 einer Raumkurve dritten Grades $\mathfrak{k}^3$ bilden mit den ihnen im Nullraume von $\mathfrak{k}^3$ zugeordneten Strahlen des Polartripels p_b, q_b, r_b aus der polaren Biplanarenkongruenz Π_3^1 von $\mathfrak{k}^3$ drei Strahlenpaare p, p_b; q, q_b; r, r_b einer involutorischen Regelschar zweiter Ordnung von N. Die aus Nullstrahlen von N bestehende Leitschar der involutorischen Regelschar enthält zwei Paare reeller assoziierter Schmiegungsstrahlen; beide Paare trennen sich harmonisch.

20. Die Regelschar zweiter Ordnung, welche die Strahlen des Polartripels p, q, r in der polaren Bisekantenkongruenz einer Raumkurve dritten Grades $\mathfrak{k}^3$ verbindet, schneidet die Polarregelschar $\mathfrak{P}^2$ von p in den Strahlen q, r. Sie enthält die p durch den Nullraum N von $\mathfrak{k}^2$ zugeordnete Biplanare p_b, und die Strahlen p und p_b sind für den Träger von $\mathfrak{P}^2$ reziprok polar (**12.**). Folglich sind die Flächen beider Regelscharen füreinander polarinvariant. Da die durch die Strahlen p, q, r gehende Fläche zweiter Ordnung auch die ihnen im Nullraume N zugeordneten Biplanaren p_b, q_b, r_b enthält (**19.**), so gilt der Satz:

Ist dem Polartripel p, q, r aus Bisekanten einer Raumkurve dritten Grades $\mathfrak{k}^3$ im Nullraume der Kurve das Polartripel p_b, q_b, r_b aus ihren Biplanaren zugeordnet, so sind die Flächen der Polarregelscharen von p, q, r und p_b, q_b, r_b polarinvariant für die Fläche zweiten Grades, auf der die Polartripel p, q, r und p_b, q_b, r_b liegen.

Die Bisekante p und die ihr im Nullraume N zugeordnete Biplanare p_b trennen als reziproke Polaren für die Flächen der Polarregelscharen $\mathfrak{P}^2$

[19]) Reye, Die Geometrie der Lage, zweite Abteilung, vierte Auflage, Stuttgart 1907, S. 193.

und $\mathfrak{P}_b^2$ sowohl die Bisekanten q, r wie auch die Biplanaren q_b, r_b harmonisch. Also:

In der Regelschar zweiter Ordnung, welche die im Nullraume ein Raumkurve dritten Grades einander zugeordneten Polartripel p, q, r ur p_b, q_b, r_b enthält, trennen je zwei einander zugeordnete Strahlen beid Tripel die beiden übrigen Bisekanten und Biplanaren harmonisch.

21. In der polaren Bisekantenkongruenz einer Raumkurve dritten Grad $\mathfrak{k}^3$ liegen von den drei Strahlen eines Polartripels p, q, r je zwei in der Pola regelschar des dritten. Jeder der drei Strahlen und die sie verbinden Regelschar zweiter Ordnung ist somit in den drei linearen Kongruenz $K_{1p}^1, K_{1q}^1, K_{1r}^1$ enthalten, die bzw. die Bisekanten p, q, r mit ihnen Pola regelscharen verbinden. In $K_{1p}^1, K_{1q}^1, K_{1r}^1$ liegen auch bzw. die den Bis kanten p, q, r im Nullraume N von $\mathfrak{k}^3$ zugeordneten Biplanaren $p_b, q_b,$ und ihre Polarregelscharen (**11.**). Da aber die im Nullraume N einand zugeordneten Tripel p, q, r und p_b, q_b, r_b durch dieselbe Regelschar zweit Ordnung verbunden werden (**19.**), und eine lineare Kongruenz für je einscharig in ihr enthaltene Regelfläche zweiter Ordnung polarinvaria ist[20]), so ergibt sich:

Sind p, q, r und p_b, q_b, r_b im Nullraume einer Raumkurve dritt Grades einander zugeordnete Tripel aus der polaren Bisekanten- und aus d polaren Biplanarenkongruenz der Kurve, so schneiden sich die linearen Ko gruenzen $K_{1p}^1, K_{1q}^1, K_{1r}^1$, die bzw. die einander zugeordneten Tripelstrahl p, p_b; q, q_b; r, r_b mit ihren Polarregelscharen verbinden, in der die beid Tripel verbindenden Regelschar zweiter Ordnung. Die Kongruenz $K_{1p}^1, K_{1q}^1, K_{1r}^1$ sind für die Fläche dieser Regelschar polarinvariant.

22. Das Polartripel p, q, r aus der polaren Bisekantenkongruenz ein Raumkurve dritten Grades $\mathfrak{k}^3$ liegt in der linearen Kongruenz K_{1p}^1, welc die Bisekante p mit ihrer Polarregelschar $\mathfrak{P}^2$ verbindet (**21.**), und die K_{1p}^1 enthaltene Regelschar zweiter Ordnung pqr geht durch die den Bis kanten p, q, r im Nullraume N von $\mathfrak{k}^3$ zugeordneten Biplanaren $p_b, q_b,$ (**19.**). Durchläuft die Bisekante q die Polarregelschar $\mathfrak{P}^2$ von p, so fä hierbei die Regelschar $pp_bqq_brr_b$ nacheinander mit je einer Regelsch eines $\mathfrak{R}^2$-Büschels[21]) zusammen. Also:

Die im Nullraume N einer Raumkurve dritten Grades $\mathfrak{k}^3$ sich sell zugeordnete Kongruenz K_{1p}^1, die eine Bisekante p der Kurve und die ihr Nullraume N von $\mathfrak{k}^3$ zugeordnete Biplanare p_b mit ihren Polarregelschar

---

[20]) v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, 1856, Nr. 105.

[21]) Jolles, Primäre und sekundäre polare Räume einer linearen Strahl kongruenz, Journ. f. d. reine u. angew. Math., Bd. 134 (1908), Nr. 6.

erbindet, enthält einen Büschel in N sich selbst zugeordneter Regelscharen weiter Ordnung; p und p_b sind das eine Paar Grundstrahlen des Büschels, die reellen bzw. konjugiert imaginären Leitgeraden u_p, v_p von K^1_{1p} das andere Paar. Jede Regelschar des Büschels schneidet die Polarregelscharen $\mathfrak{P}^2$ und $\mathfrak{P}^2_b$ von p und p_b in Strahlenpaaren, die bzw. mit p ein Polartripel der polaren Bisekantenkongruenz Π^3_1 und mit p_b ein Polartripel der polaren Biplanarenkongruenz Π^1_3 von $\mathfrak{k}^3$ bilden. Für die Flächen von $\mathfrak{P}^2$ und $\mathfrak{P}^2_b$ sind die Regelscharen des Büschels polarinvariant (20.).

Die für die Flächen von $\mathfrak{P}^2$ und $\mathfrak{P}^2_b$ zueinander polaren Strahlen p und p_b trennen je zwei Strahlen harmonisch, in denen diese Regelscharen von denen des $\mathfrak{R}^2$-Büschels geschnitten werden. Je zwei durch p und p_b in $\mathfrak{P}^2$ wie $\mathfrak{P}^2_b$ harmonisch getrennte Strahlen sind also in den polaren Kongruenzen Π^3_1 und Π^1_3 von $\mathfrak{k}^3$ konjugiert. Kurz:

Jede Bisekante p einer Raumkurve dritten Grades und die ihr im Fullraume der Kurve zugeordnete Biplanare p_b sind zusammengehörige Involutionsachsen für die Involutionen konjugierter Strahlen, welche die Korrelationen der polaren Bisekanten- und der polaren Biplanarenkongruenz bzw. in den Polarregelscharen $\mathfrak{P}^2$ und $\mathfrak{P}^2_b$ von p und p_b hervorrufen.

Berlin-Halensee, den 10. Januar 1919.

(Eingegangen am 9. Juni 1919.)

Additive und stetige Funktionaloperationen.

Von

Hugo Steinhaus in Lemberg.

Einleitung.

Eine *Funktionaloperation* nennt man eine Beziehung zwischen ein variablen Funktion und einer von der ersten abhängigen Funktion. W beschränken uns durchweg auf den Fall, daß die abhängige Funktion ei *Konstante* ist. Dann ist die Funktionaloperation eine Beziehung zwisch einer willkürlichen Funktion und einer von ihr abhängigen *Zahl*, die *Wert* der Funktionaloperation genannt wird. Der Kürze halber w manchmal statt „Wert" wieder „Funktionaloperation" oder — no kürzer — „Operation" gesagt.

Diese Begriffe, wofür ein einfaches Beispiel etwa die Beziehu zwischen einer in $< a, b >$ erklärten stetigen Funktion von beschränkt Schwankung und der Länge der Bildkurve liefert, hat Volterra e geführt. Er selbst sowie Fréchet, Hadamard und F. Riesz haben weiter ausgebildet und bei Behandlung verschiedener wichtiger Proble angewandt[1]).

Hier wird an die Arbeiten der drei letztgenannten Forscher angeknüp wobei namentlich einige neue Sätze über additive und stetige Operation aufgestellt und bewiesen werden.

Additiv heißt eine Operation $F(X)$, unter $X = X(t)$ eine im Int valle $< a, b >$ erklärte Funktion von t, d. h. die „Variable", unter den „Wert" verstanden, dann und nur dann, wenn die Beziehung

$$F(X + Y) = F(X) + F(Y)$$

für alle diejenigen X, Y des Definitionsbereiches der Operation gilt, die auch $X + Y$ zum selben Bereiche gehört. Es bedeutet also „addit soviel als „distributiv in bezug auf die Addition". Die dafür gebräu

[1]) Vgl. z. B. Encyclopédie des Sciences mathématiques, Édition française, Tom vol. 5, Équations et opérations fonctionnelles, par S. Pincherle, § 19, S. 31.

che Bezeichnung „linear" erscheint unzweckmäßig, da sonst die wörtliche bertragung des bekannten Satzes der gewöhnlichen Funktionentheorie: eine additive, stetige Funktion ist homogen-linear" in die Theorie der unktionaloperationen kaum möglich wäre; dieser Satz bildet aber den auptgegenstand der vorliegenden Abhandlung.

Um den *Stetigkeitsbegriff* zu erklären, müssen wir einige Definitionen nd Bezeichnungsweisen einführen.

Definitionen und Bezeichnungen.

Wir bezeichnen mit S die Gesamtheit aller in $< a, b >$ erklärten n Lebesgueschen Sinne integrierbaren Funktionen von t, mit S^2 die esamtheit aller Funktionen, deren Quadrat auch noch in demselben Sinne tegrierbar ist, mit B_M die Gesamtheit aller nach Lebesgue meßbaren unktionen, deren Betrag fast nirgends in $< a, b >$ die Zahl M überifft. Solche Funktionen nennen wir „wesentlich beschränkt" oder mitnter kurz „beschränkt". Eine beschränkte Funktion gehört demnach nmer einem B_M an. Das kleinste M nennen wir „die (wesentliche) bere Grenze" der Funktion. — Die Summe aller B_M nennen wir B.

Diese Gesamtheiten werden *Felder* genannt, sobald man in ihnen den *istanzbegriff* erklärt hat. Für diesen Begriff kommen folgende Definitionen Betracht:

I. Die Distanz von X und Y ist gleich $\int_a^b |X(t) - Y(t)|\, dt$, wenn tzteres Symbol einen Sinn hat.

II. Die Distanz von X und Y ist gleich $\int_a^b [X(t) - Y(t)]^2\, dt$, wenn tzteres Symbol einen Sinn hat.

Beide Definitionen involvieren den hier durchweg gebrauchten ebesgueschen Integralbegriff. I liefert für jedes Funktionenpaar von S, für jedes Funktionenpaar von S^2 eine bestimmte endliche Distanzzahl, nd es können in leichtverständlicher Bezeichnung die *Felder*

$$SI, \quad S^2II, \quad BI,$$

wie

$$S^2I, \quad BII$$

bildet werden. Die Kombination SII liefert kein Feld, da der Distanzgriff II nicht für alle Funktionenpaare der S-Gesamtheit erklärt worn ist.

Eine Operation $F(X)$ heißt im gegebenen Felde *stetig*, wenn sie in nreichend nahen Elementen des Feldes beliebig wenig abweichende Werte nimmt, in Formeln, wenn aus

$$X_n \to X \quad \text{immer} \quad F(X_n) \to F(X)$$

folgt. Dabei bedeutet $F(X_n) \to F(X)$ soviel wie

$$\lim_{n\to\infty} F(X_n) = F(X),$$

während $X_n \to X$ ausdrücken soll, daß die Distanz von X_n und X m wachsendem n gegen Null strebt.

Die geometrische Ausdrucksweise erlaubt uns, anstatt „Funktio „Punkt (des Funktionenraumes)" zu sagen; dabei werden als „Koord naten" eines Punktes X der S-Gesamtheit die nach der Eulerschen Reg gebildeten Zahlen

$$\int_a^b X(t)\,\varphi_k(t)\,dt \qquad (k = 1, 2, \ldots \text{in in}$$

bezeichnet, wo die Folge $\{\varphi_k(t)\}$ irgendein in $< a, b >$ erklärtes vo ständiges, normiertes Orthogonalsystem — das „Koordinatensystem" darstellt. Ein solches System ist z. B. das T-System (trigonometrisch System):

$$(T) \qquad \frac{1}{|\sqrt{b-a}|}, \qquad \sqrt{\frac{2}{b-a}}\cos 2\pi\frac{t-a}{b-a}, \qquad \sqrt{\frac{2}{b-a}}\sin 2\pi\frac{t-a}{b-a}, \ldots$$

Fragestellung.

Fréchet hat bewiesen, daß eine jede im Felde $S^2 II$ stetige, addit Operation sich in der Form

$$F(X) = \int_a^b H(t)\,X(t)\,dt$$

darstellen läßt, wo H ein von X unabhängiger Punkt von S^2 ist, u daß umgekehrt, wie sofort ersichtlich, die Integralformel rechterhand imm eine im Felde $S^2 II$ stetige und additive Operation definiert, wenn H zu S^2 gehört[2]).

Es wird nun die *Frage* aufgeworfen, ob analoge Sätze bei den übrig vier Feldern gelten. Diese Fragestellung erinnert an den Satz der gewö lichen Funktionentheorie, daß eine jede additive, stetige Funktion homog linear, d. h. von der Gestalt

$$y = cx$$

sei. In unserem Falle tritt rechterhand ein Integral auf, da eine Operat als Funktion von unendlich vielen Variablen aufgefaßt werden muß. V werden auch tatsächlich das Integral als eine Linearform der unendl vielen Koordinaten von X anschreiben können und für die Koeffizien dieser Form gewisse notwendige und hinreichende Bedingungen finden.

---

[2]) Maurice Fréchet, Sur les opérations linéaires, Troisième note, Transact of the American Mathematical Society, vol. 8, Nr. 4, S. 433—446, Oktober 1907.

Ergebnisse.

Satz 1. *Jede in SI erklärte stetige und additive Operation ist von er Form*

1) $$F(X) = \int_a^b H(t)\, X(t)\, dt,$$

o H ein einem B_M angehöriger Punkt ist, mithin $H(t)$ eine meßbare, eschränkte Funktion von t bezeichnet.

Umkehrung. *Ist H ein Punkt von B_M, so stellt* (1) *eine in SI rklärte, stetige und additive Operation dar.*

Satz 2 *und seine* Umkehrung *bilden den bereits angeführten Satz on Fréchet.*

Satz 3. *Jede in $B_M I$ erklärte stetige und additive Operation ist on der Form* (1), *wo H ein Punkt von S ist.*

Umkehrung. *Ist H ein Punkt von S, so stellt* (1) *eine in B_M rklärte, stetige und additive Operation dar.*

Um die Bedeutung des Satzes 3 ins rechte Licht zu setzen, seien inige Überlegungen, die später beim Beweise eine Rolle spielen werden, orweggenommen.

Sei C die Gesamtheit der in $< a, b >$ stetigen Funktionen; die istanz III zweier in C gelegenen Funktionen $X(t)$, $Y(t)$ sei gleich ax $|X(t) - Y(t)|$. Das Feld $CIII$ ist augenscheinlich in BI enthalten.

Nach F. Riesz ist jede in $CIII$ erklärte additive, stetige Operation (X) in der Form

$$F(X) = \int_a^b X(t)\, dA(t)$$

rstellbar, unter $A(t)$ eine nur von F abhängige Funktion von beschränkter Schwankung verstanden. Das Integral ist ein Integral im Sinne n Stieltjes[3]).

Nach Lebesgue gilt ferner

$$F(X) = \int_a^b X(x(t))\, \lambda(t)\, dt,$$

ter $\lambda(t)$ eine im Lebesgueschen Sinne integrierbare, unter $x(t)$ eine

[3]) Vgl. F. Riesz, Sur les opérations fonctionnelles linéaires, C. R. 149 (1909), 974—976; Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, Math. Annalen (1910), S. 449—497; Démonstration nouvelle d'un théorème concernant les opérations fonctionnelles linéaires, Annales de l'École Normale (3) 37 (1914), S. 9—14. an vergleiche hierzu E. Helly, Über lineare Funktionaloperationen, Wiener Berichte 12, S. 265—297, und J. Radon, Theorie und Anwendungen der absolut additiven engenfunktionen, Wiener Berichte 122 (1913), S. 1—144.

nur von $A(t)$ abhängige Funktion verstanden[4]). Es ist bemerkenswe daß sich dieses Ergebnis, wie weiter unten gezeigt wird, im Falle d in $B_M I$ erklärten additiven und stetigen Operation zu dem einfachen Resultat

$$F(X) = \int_a^b H(t)\, X(t)\, dt,$$

unter H einen Punkt in S verstanden, verschärfen läßt. Aus dem Ries schen Resultat folgt mit Leichtigkeit der Satz 3.

Wir beginnen mit einigen einfachen Bemerkungen.

Bemerkung 1. Da jede in $S^2 I$ erklärte stetige und additive O ration augenscheinlich in $B_M I$ dieselben Eigenschaften hat, so ist sie $B_M I$ nach Satz 3 von der Form (1) mit einem zu S gehörenden Damit (umgekehrt) dieselbe Formel (1) in ganz S^2 einen Sinn habe, m selbstverständlich H zu S^2 gehören; damit aber dann noch die Operation $S^2 I$ stetig sei, muß — wie im Hilfssatz 1 gezeigt werden soll — H einem B_M gehören, so daß wir auf den Fall des Satzes 1 zurückkomm ohne irgendwelche neue interessante Bedingungen für $S^2 I$ zu finden.

Bemerkung 2. Jede in $B_M I$ stetige Operation ist in B_M stetig, da

$$\int_a^b [X_n(t) - X(t)]^2 dt \leqq 2M \int_a^b |X_n(t) - X(t)|\, dt$$

ist. Eine in $B_M II$ stetige Operation ist immer in $B_M I$ stetig, da

$$\int_a^b |X_n(t) - X(t)|\, dt \leqq \sqrt{(b-a) \int_a^b [X_n(t) - X(t)]^2 dt}$$

gilt. Infolgedessen gilt der Satz 3 auch, wenn man in seinem Wortl $B_M I$ durch $B_M II$ ersetzt.

Aus den vorstehenden Bemerkungen ersieht man, daß die drei e genannten Felder SI, $S^2 II$, BI und die darauf bezüglichen Sätze den Vordergrund treten müssen.

Um den Lauf der Betrachtungen nicht zu stören, werden die *Hi sätze*, die eigentlich vorangehen müßten, erst nachträglich begründet werd dagegen wird jeder der drei Sätze 1, 2, 3 gleich durch je einen *Para satz* 1, 2, 3 und durch seine Umkehrung ergänzt werden. Es sind im ganzen zwölf Sätze, welche die Hauptfrage beantworten. Die Para sätze beziehen sich auf die Linearformen von unendlich vielen Variab Der Beweis des Parallelsatzes 1 beruht auf dem im Jahre 1916

[4]) H. Lebesgue, Sur l'intégrale de Stieltjes et sur les opérations fonctionn linéaires, C. R. 150 (1910), S. 86—88.

erfasser veröffentlichten Satze, daß die durchschnittliche Konvergenz der littelwerte einer trigonometrischen Reihe *notwendig* (und hinreichend) t, damit diese Reihe eine Fourierentwicklung sei[5]) Der Beweis der mkehrung des Parallelsatzes 3 stützt sich auf einen Gedanken des Herrn t. Banach, von welchem auch der ganze Beweis des Hilfssatzes 4 herührt. Der Beweis des Satzes 2 ist bis auf Bezeichnungs- und formelle nterschiede der Fréchetsche Originalbeweis. Die naheliegenden Anendungen auf die Theorie der Fourierreihen bilden den Abschluß der rbeit.

Beweise.

Beweis des Satzes 2.

Es sei

2) $$\{\varphi_n(t)\} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

n in $< a, b >$ erklärtes vollständiges, normiertes Orthogonalsystem von mt ihren Quadraten integrierbaren Funktionen, d. h. ein Funktionenstem, für welches

$$\int_a^b \varphi_p \varphi_q \, dt = \begin{cases} 0 & \text{für } p \neq q \\ 1 & \text{„ } p = q \end{cases}$$

lt, und das so beschaffen ist, daß es

3) keine samt ihrem Quadrate integrierbare Funktion $\varphi_0(t)$ gibt, so daß die Beziehungen (α) für alle nichtnegativen p, q erhalten bleiben. Ein „Koordinatensystem" dieser Art ist z. B. das T-System. Entwickeln wir formell

$$X(t) \sim x_1 \varphi_1(t) + x_2 \varphi_2(t) + \ldots + x_n \varphi_n(t) \ldots,$$

dem wir setzen

$$x_k = \int_a^b X(t) \varphi_k(t) \, dt. \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

ach bekannten Sätzen ist die unendliche Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$$

nvergent und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = \int_a^b X^2(t) \, dt,$$

as auch in der Form

$$\int_a^b [X(t) - s_n(t)]^2 \, dt \to 0,$$

[5]) H. Steinhaus, Niektóre własności szeregów trygonometrycznych i szeregów uriera, herausgegeben von der Krakauer Akademie der Wissenschaften, vorgelegt 3. Juli 1916; Kap. III, Satz X, S. 43.

mit

$$s_n(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k \varphi_k(t) \tag{7}$$

geschrieben werden kann. Nach Riesz und Fischer gilt ferner der Sa daß zu einer jeden Koordinatenfolge $\{x_k\}$ mit konvergenter Quadratsum ein Punkt X in S^2 gehört[6]).

Es sei nun $F(X)$ eine in S^2 *II* erklärte additive und stetige Operati Aus (6) folgt

$$F(s_n) \to F(X). \tag{8}$$

Wegen der vorausgesetzten Additivität ist nach (7)

$$F(s_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k F(\varphi_k). \tag{9}$$

Hier muß bemerkt werden, daß bereits bei der Ableitung der Formel die Stetigkeit eine Rolle spielt. Nur für stetige Operationen kann näml die Beziehung

$$F(cX) = cF(X), \qquad (c \text{ konsta}$$

welche für rationale c eine Folge der Additivität ist, unter Benutzung Schlußweise, daß $c_n X \to cX$, wenn c_n gegen c konvergiert, auf irrationa ausgedehnt werden. Setzen wir

$$F(\varphi_k) = h_k. \qquad (k = 1, 2, \tag{10}$$

Die Folge $\{h_k\}$ ist, wie ersichtlich, von der Wahl des Koordinatensyste nicht aber von der Wahl des Punktes X abhängig. Die Formeln (8), und (10) ergeben

$$F(X) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k x_k. \tag{11}$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} h_k x_k$ ist für jede Folge $\{x_k\}$ der Koordinaten eines Punk der Gesamtheit S^2 *konvergent* und stellt die Operation $F(X)$ als e Linearform von unendlich vielen Variablen dar. Das ist der Inhalt Parallelsatzes 2.

Da nun nach dem zuletzt zitierten Riesz-Fischerschen Satze e jede Folge $\{x_k\}$ mit konvergenter Quadratsumme als Koordinatenfo eines bestimmten S^2-Punktes aufgefaßt werden kann, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} h_k x_k$ *alle* $\{x_k\}$ mit konvergenter Quadratsumme konvergent. Aus dem ar metischen Hilfssatz 2 folgt aber, daß dann

[6]) F. Riesz, Göttinger Nachrichten 1907, S. 116; E. Fischer, Comptes Re 144 (1907), S. 1022.

12) $$\sum_{k=1}^{\infty} h_k^2$$

elbst konvergent sein muß. Es existiert daher nach dem Riesz-Fischer-hen Satze in S^2 ein Punkt H mit Koordinaten $\{h_k\}$; dann gilt wegen (5)

13) $$\sum_{k=1}^{\infty}(x_k \pm h_k)^2 = \int_a^b [X(t) \pm H(t)]^2 dt$$

nd durch Addition dieser beiden Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k h_k = \int_a^b H(t)\, X(t)\, dt,$$

emnach wegen (11)

14) $$F(X) = \int_a^b H(t)\, X(t)\, dt,$$

. z. b. w.

Der Beweis der Umkehrung des Satzes 2 ist leicht zu erbringen, a die rechte Seite von (14) für ein zu S^2 gehörendes H eine in S^2 ad-itive Operation definiert, die wegen

$$\left| \int_a^b H(t) X_n(t)\, dt - \int_a^b H(t) X(t)\, dt \right| \leqq \sqrt{\int_a^b H^2(t)\, dt \int_a^b [X_n(t) - X(t)]^2 dt}$$

uch im Sinne II stetig ist.

Wir haben aber auch bereits — dank dem arithmetischen Hilfssatz 2 — ie folgende Umkehrung des Parallelsatzes 2 bewiesen:

Ist die Linearform (11) für alle Koordinatenfolgen $\{x_k\}$ der zu S^2 ehörigen Punkte X konvergent, so stellt sie im Felde $S^2\,II$ eine additive, etige Operation dar. Die Folge $\{h_k\}$ ist die Koordinatenfolge eines be-immten Punktes H in S^2. — Unser Hilfssatz 2 erlaubt nämlich, aus egebenen Voraussetzungen auf die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} h_k^2$ zu schließen, oraus alles übrige sich in ähnlicher Weise wie vorhin ergibt.

Beweis des Satzes 1.

Da nach Voraussetzung $F(X)$ in $S\,I$ erklärt, additiv und stetig sein ll, so ist $F(X)$ auch in $S^2\,II$ definiert, additiv und stetig. In der Tat t S^2 in S enthalten, und aus $X_n \to X$ im Sinne II folgt $X_n \to X$ im inne I, da doch

$$\int_a^b |X_n(t) - X(t)|\, dt \leqq \sqrt{b-a} \sqrt{\int_a^b [X_n(t) - X(t)]^2 dt}$$

t. Es existiert daher nach Satz 2 ein Punkt H in S^2, so daß in ganz ^{2} die Formel (14) gilt.

Es wird nun behauptet, daß H zu einem B_M gehört. Denn wä $H(t)$ nicht wesentlich beschränkt, so würde nach dem Hilfssatz 1 ei zu S^2 gehörige Punktfolge

$$\{X_n(t)\} \tag{15}$$

existieren, so daß

$$\int_a^b |X_n(t)|\,dt \to 0 \tag{16}$$

und zugleich

$$\int_a^b H(t)X_n(t)\,dt \to +\infty \tag{17}$$

wäre. Dann wäre aber wegen der Stetigkeit im Sinne I und wegen (1

$$F(X_n) \to F(0),$$

und wegen (14) und (17)

$$F(X_n) \to +\infty,$$

was nicht möglich ist. Es liegt also H in B_M, und die Formel (1 stellt $F(X)$ in S^2 dar.

Es bleibt noch zu beweisen, daß dieselbe Formel auch $F(X)$ in ga S darstellt. Nun liegen aber die Punkte von S^2 in SI überall dic denn gehört X zu S und setzt man

$$Y_n(t) = X(t), \qquad \text{wenn } |X(t)| \leqq \tag{18}$$

$$Y_n(t) = 0 \qquad \text{für } |X(t)| >$$

so gehört jedes Y_n zu S^2 und es ist

$$\int_a^b |Y_n(t) - X(t)|\,dt \to 0. \tag{19}$$

Da in S^2 die Formel (14) gilt und daher

$$F(Y_n) = \int_a^b H(t)Y_n(t)\,dt \tag{20}$$

gesetzt werden kann, so muß wegen (19) und (20) mit Rücksicht auf Beschränktheit von $H(t)$

$$F(X) = \lim F(Y_n) = \lim \int_a^b H(t)Y_n(t)\,dt = \int_a^b H(t)X(t)\,dt \tag{21}$$

sein. Damit ist aber Satz 1 bewiesen.

Der Beweis der Umkehrung des Satzes 1 besteht in der na liegenden Feststellung, daß für ein in B_M liegendes H die Formel (eine additive Operation in S erklärt, welche, wie die Beziehungen

$$|F(X_n) - F(X)| = \left|\int_a^b H(t)[X_n(t) - X(t)]\,dt\right| \leqq M \int_a^b |X_n(t) - X(t)|\,dt$$

hne weiteres zeigen, in SI stetig ist.

Parallelsatz 1. Legt man das T-System als Koordinatensystem ıgrunde, so gilt für eine in SI erklärte additive und stetige Operation $F(X)$ nmer

22) $$F(X) \doteq \sum_{k=1}^{\infty} h_k x_k,$$

o $\{h_k\}$, $\{x_k\}$ die T-Koordinaten von H (dessen Existenz Satz 1 ver-ürgt) bzw. von X sind und wo der Punkt $(\cdot)$ über dem Gleichheits-eichen $(=)$ bedeutet, daß rechterhand die Summation im Sinne der ersten esaroschen Mittelwertbildung vorgenommen werden soll, oder — kurz esagt — daß die Reihe rechterhand „im Mittel konvergent" ist.

Beweis. Bezeichnen wir mit $\{\psi_k(t)\}$ die am Schluß der Einleitung enannte trigonometrische Funktionenfolge, so ist, wie der Verfasser an ner anderen Stelle gezeigt hat[7]), für ein zu S gehörendes X

$$\int_a^b \left| X(t) - \frac{n x_1 \psi_1(t) + (n-1) x_2 \psi_2(t) + \ldots + x_n \psi_n(t)}{n} \right| dt \to 0,$$

enn $n \to \infty$. Ist also $H(t)$ wesentlich beschränkt, so ist

$$\int_a^b H(t) \left[X(t) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (n-k+1)\, x_k \psi_k(t) \right] dt \to 0,$$

der nach Ausführung der Integration

23) $$\int_a^b H(t) X(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} h_k x_k,$$

nd nach (14) mit Rücksicht auf den Satz 1

$$F(X) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k x_k,$$

. z. b. w.

Umkehrung des Parallelsatzes 1. Ist die Linearform

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k x_k$$

r *alle* Folgen $\{x_k\}$, die als T-Koordinaten von S-Punkten X aufgefaßt erden können, im Mittel konvergent, so ist $\{h_k\}$ die T-Koordinatenfolge

[7]) Vgl. die Fußnote [5]).

eines zu einem B_M gehörigen Punktes H; die Linearform stellt eine SI erklärte stetige, additive Operation in bezug auf X dar.

Beweis. Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} h_k x_k$ für alle zu S gehörenden X i Mittel konvergent, so ist sie es um so mehr für alle zu S^2 gehörenden d. h. für alle $\{x_k\}$ mit konvergenter Quadratsumme. Wäre nun $\sum_{k=1}^{\infty} h_k^2$ vergent, so müßte es, wie aus dem Hilfssatze 2 hervorgeht, eine kc vergente Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$$

geben, so daß $\sum_{k=1}^{\infty} h_k \alpha_k$ gegen $+\infty$ „eigentlich" divergierte und infolg dessen nicht einmal im Mittel konvergent sein könnte. Es ist also $\sum_{k=1}^{\infty}$ konvergent und $\{h_k\}$ ist die Koordinatenfolge eines Punktes H, der in liegt. Der Punkt H gehört nun zu einem B_M. Wäre nämlich $H(t)$ nic wesentlich beschränkt, so wären auch die Funktionen

$$\text{(Def.)} \qquad H_n^{(1)}(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (n-k+1)\, h_k \psi_k(t),$$

die nach einem bekannten Lebesgueschen Satze aus der Theorie d Fourierschen Reihen fast überall in $< a, b >$ gegen $H(t)$ konvergieren auch nicht in ihrer Gesamtheit wesentlich beschränkt. Dann würde aber nach Hilfssatz 4 eine Funktion $\bar{X}(t)$ in S geben, so daß

$$\limsup_{n \to \infty} \int_a^b \bar{X}(t)\, H_n^{(1)}(t)\, dt = +\infty$$

wäre. Dies besagt aber, nach Einführung der Koordinaten $\{\bar{x}_k\}$ von

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (n-k+1) \bar{x}_k h_k = +\infty,$$

was gegen die Voraussetzung verstößt.

Es gehört daher H zu B_M und es gilt dem Beweise des Parall satzes 1 gemäß die Beziehung (23). Da aber laut Umkehrung Satzes 1 die linke Seite von (23) eine in SI erklärte stetige addit Operation in bezug auf X darstellt, so ist dasselbe auch für die rec

[8]) Vgl. H. Lebesgue, Leçons sur les séries trigonométriques, Paris 1904, S.

eite richtig, so daß unsere Behauptung in ihrem vollen Umfange be-iesen ist.

Bemerkung zum Parallelsatz 1. Herr St. Banach und der Verfasser haben in einer gemeinsamen der Krakauer Akademie der Wissenschaften am 6. Mai 1918 vorgelegten Note gezeigt, daß die sogenannte Parsevalsche Beziehung

$$\int_a^b H(t)\,X(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} h_k x_k$$

nter Zugrundelegung des T-Systems *nicht* für alle X von S gilt, da ie Reihe rechts nicht zu konvergieren braucht. Nimmt man dies als ewiesen an, so folgt, daß man die Aussage des Parallelsatzes 1 *nicht* erart verschärfen kann, daß in (22) der Punkt über dem Gleichheitseichen unterbleibt. Das Resultat der zitierten Note läßt sich unter Anendung des ohnehin für die vorliegende Abhandlung erforderlichen Hilfsatzes 4, wie folgt, leicht gewinnen.

Es sei $\bar{H}(t)$ eine stetige Funktion, für welche die Funktionen

24) $$s_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \bar{h}_k \psi_k(t),$$

. h. die Partialsummen der Fourier-Entwickelung *nicht* gleichmäßig beschränkt sind[9]). Bildet man also

25) $$G_n(t) = \bar{H}(t) - s_n(t),$$

ist $\{G_n(t)\}$ eine Folge stetiger, nicht gleichmäßig beschränkter Funktionen. Nach Hilfssatz 4 existiert dann ein $\bar{X}$ in S, so daß

$$\limsup_{n\to\infty} \int_a^b \bar{X}(t)\,G_n(t)\,dt = +\infty,$$

ilt. Daraus folgt aber wegen (25)

$$\limsup_{n\to\infty} \int_a^b \bar{X}(t)[\bar{H}(t) - s_n(t)]\,dt = +\infty$$

nd — wegen

$$\int_a^b \bar{X}(t)[\bar{H}(t) - s_n(t)]\,dt = \int_a^b \bar{H}(t)\,\bar{X}(t)\,dt - \sum_{k=1}^{n} \bar{h}_k \bar{x}_k -$$

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \bar{h}_k \bar{x}_k = -\infty,$$

[9]) Z. B. jene Fejérsche stetige Funktion, deren Fourierentwickelung an einer telle divergiert. Rendic. del Circ. Mat. di Palermo, 28 (1909), S. 402.

womit die Ungültigkeit der Parsevalschen Formel im betrachteten Fa bewiesen ist.

Beweis des Satzes 3.

Wir führen, wie schon vorhin erwähnt, den folgenden Distanzbegriff I im Funktionenraum ein:

Die Distanz zweier in B_M gelegenen Funktionen X und Y wird definitione der wesentlichen oberen Grenze des Ausdruckes

$$|X(t) - Y(t)| \tag{26}$$

in $< a, b >$ gleich gesetzt.

Ferner soll C die Gesamtheit der in $< a, b >$ stetigen Funktion und $C\,III$ das diesen Definitionen entsprechende Feld bezeichnen. Da gilt der folgende Satz von F. Riesz:

Jede in $C\,III$ erklärte additive, stetige Operation $F(X)$ ist in Form

$$F(X) = \int_a^b X(t)\,dA(t) \tag{27}$$

darstellbar, wo $A(t)$ eine nur von F abhängige Funktion von beschränk Schwankung, das Integral ein Integral im Sinne von Stieltjes bezeichnet[10].

Es sei jetzt eine in $B_M I$ erklärte additive und stetige Operation $F($ gegeben. Setzt man für alle natürlichen Zahlen m

$$F(m\,X) = m\,F(X),$$

so wird hierdurch $F(X)$ widerspruchslos in

$$B = B_1 + B_2 + B_3 + \ldots$$

erklärt und auch noch in $B\,I$ additiv und stetig sein. Da nun C in enthalten ist und

$\int_a^b |X(t) - Y(t)|\,dt \leqq |b - a|$ wesentl. ob. Grenze von $|X(t) - Y($

ist, so ist jede in $B\,I$ erklärte additive und stetige Operation auch $C\,III$ additiv und stetig und hat nach dem soeben zitierten Rieszsch Satz die Form (27), die in ganz C gilt. Es soll jetzt bewiesen werd daß man für $A(t)$ eine *totalstetige* Funktion, d. h. ein Integral annehm kann. Wir beginnen mit dem Nachweis, daß $A(t)$ als stetig gewählt w den kann.

Nehmen wir an, t_0 sei eine im Innern von $< a, b >$ gelegene U stetigkeitsstelle von $A(t)$. Dann wäre

$$\lim_{t \to t_0 - 0} A(t) = \alpha, \qquad \lim_{t \to t_0 + 0} A(t) = \beta, \qquad \alpha +$$

[10]) Vgl. die Fußnote [3]).

la $A(t)$ von beschränkter Schwankung und mithin beide Grenzwerte vor-anden sind. Eine Unstetigkeit könnte übrigens auch dann vorliegen, venn $\alpha = \beta \neq A(t_0)$ wäre. Diesen Fall schließen wir indessen aus, da lie Festsetzung $A(t_0) = \alpha$ die Unstetigkeit aufheben würde, ohne den Wert des Integrals (27) für zu C gehörende X zu ändern.

Wir definieren jetzt für hinreichend große n die stetigen Funktionen $X_n Y_n(t)$ durch die Festsetzungen:

$$X_n(t) = 0 \quad \text{für} \quad a \leqq t \leqq t_0 - \frac{2}{n} \quad \text{und} \quad t_0 + \frac{2}{n} \leqq t \leqq b,$$

$$X_n(t) = 1 \quad \text{für} \quad t_0 - \frac{1}{n} \leqq t \leqq t_0 + \frac{1}{n},$$

$X_n(t)$ linear in den beiden Restintervallen

$$I_1: \ < t_0 + \frac{1}{n}, \ t_0 + \frac{2}{n} >, \qquad I_2: \ < t_0 - \frac{2}{n}, \ t_0 - \frac{1}{n} >.$$

Dann gilt:

$$\int_a^b X_n(t)\, dA(t) = \int_{t_0 - \frac{1}{n}}^{t_0 + \frac{1}{n}} 1 \cdot dA(t) + \int_{I_1} X_n(t)\, dAt + \int_{I_2} X_n(t)\, dA(t) =$$

$$= J_0 + J_1 + J_2.$$

Es ist nun für $n \to \infty$

$$J_0 = A\left(t_0 + \frac{1}{n}\right) - A\left(t_0 - \frac{1}{n}\right) \to \beta - \alpha \neq 0,$$

$$J_1 \to 0, \qquad J_2 \to 0.$$

Um die beiden letzten Beziehungen einzusehen, bemerken wir, daß

$$|J_1| \leqq \text{die Schwankung von } A(t) \text{ in } I_1$$

st; $A(t)$ ist eine Funktion von beschränkter Schwankung. Es ist darum

$$A(t) = N(t) + P(t),$$

nter N und P monotone Funktionen verstanden. Die Schwankung von (t) in $I_1 = \left| N\left(t_0 + \frac{2}{n}\right) - N\left(t_0 + \frac{1}{n}\right) \right| \to 0$, das gleiche gilt für $P(t)$ lso auch $A(t)$. Darum gilt $J_1 \to 0$ und ebenso $J_2 \to 0$.

Es ist also

$$\int_a^b X(t)\, dA(t) \to \beta - \alpha \neq 0.$$

)a X_n zu C gehört, so folgt hieraus wegen (27)

28) $$F(X_n) \to \beta - \alpha \neq 0.$$

Andererseits ist, wie aus der Definition von X_n ersichtlich

$$\int_a^b |X_n(t)|\,dt \leqq \frac{4}{n} \to 0,$$

was

$$F(X_n) \to F(0)$$

nach sich zieht. Da aber $F(0) = F(0) + F(0)$, also

$$F(0) = 0$$

ist, so ist die zuletzt hingeschriebene Grenzwertbeziehung mit (28) u verträglich. Wäre die Unstetigkeitsstelle t_0 nicht im Innern, sondern a Rande von $< a, b >$ gelegen, so würde man die Unstetigkeit durch g eignete Festsetzung aufheben können, ohne den Wert des Integrals (2 zu ändern. Die Stetigkeit von $A(t)$ ist also festgestellt, und es blei nur noch die Totalstetigkeit nachzuweisen. Es möge $A(t)$ nicht tot stetig sein. Es gibt dann eine positive Zahl η, so daß *jeder* positiv Zahl ε eine abzählbar unendliche Menge von einander ausschließend Intervallen zugeordnet werden kann, derart, daß die Summe der Schwa kungen von $A(t)$ in diesen Intervallen größer als η, die Summe d Intervallängen aber kleiner als ε ausfällt. Dies folgt alles unmittelb aus der Definition der Totalstetigkeit[11]). Aus jenen Intervallen könn man dann eine endliche Anzahl r herausgreifen, so daß die zugehörige Sum der Schwankungen immer noch größer als η ausfällt. Es seien

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_r$$

diese Intervalle. Die gleichen Buchstaben mögen ihre Längen bezeichne Es ist dann

$$\sum_{i=1}^{r} \Delta_i < \varepsilon.$$

Wir teilen jetzt das Intervall Δ_i in p gleiche Teile

$$\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots, \delta_{ip};$$

die Zahl p wird später bestimmt werden. *Da* $A(t)$ *stetig* ist, so ist d Schwankung von $A(t)$ in Δ_i gleich dem Grenzwert der Summe

$$\sum_{k=1}^{p} [\text{obere Grenze von } A(t) \text{ in } \delta_{ik} - \text{untere Grenze von } A(t) \text{ in } \delta_{ik}]$$

für $p \to \infty$. Wählt man daher p groß genug, so kommt

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{p} [\text{obere Grenze von } A(t) \text{ in } \delta_{ik} - \text{untere Grenze von } A(t) \text{ in } \delta_{ik}] >$$

[11]) Vgl. z. B. Ch. J. de la Vallée Poussin, Cours d'Analyse Infinitésima 2. Ausg., Louvain 1912; Bd. II, § 105, S. 116—117.

Die stetige Funktion $A(t)$ erreicht ihre obere und untere Grenze in δ_{ik} n zwei Punkten dieses Intervalls, die α_{ik} bzw. β_{ik} heißen mögen. Indem ir also α_{ik}, β_{ik} zu Endpunkten eines neuen, in δ_{ik} gelegenen Intervalls $_{ik}$ wählen, erhalten wir eine endliche Anzahl von einander nicht übereckenden Intervallen ζ_{ik}, so daß

$$\sum_{i,k}' [A(\alpha_{ik}) - A(\beta_{ik})] > \eta$$

nd, da alle ζ_{ik} in den Δ_i liegen, zugleich

$$\sum_{i,k}' \zeta_{ik} < \varepsilon$$

lt, wo ζ_{ik} zugleich die Länge des Intervalls ζ_{ik} bezeichnet.

Wir nehmen jetzt $\varepsilon = \frac{1}{n}$ an und setzen

$$\overline{Y}_n(t) = 1 \quad \text{für} \quad \beta_{ik} < t < \alpha_{ik},$$
$$\overline{Y}_n(t) = -1 \quad \text{für} \quad \alpha_{ik} < t < \beta_{ik},$$
$$\overline{Y}_n(t) = 0 \quad \text{außerhalb aller } \zeta_{ik} \text{ in } < a, b >.$$

ann ist

$$29) \quad \int_a^b \overline{y}(t)\, dA(t) = \sum_{i,k}' \pm \int_{\zeta_{ik}} dA(t) = \sum_{i,k}' [A(\alpha_{ik}) - A(\beta_{ik})] > \eta.$$

Wir werden jetzt $\overline{Y}_n(t)$ so modifizieren, daß wir zu einer stetigen unktion $Y_n(t)$ kommen, die eine zu (29) analoge Ungleichheit erfüllt. Es öge z. B. $\overline{Y}_n(t)$ in einem Intervalle ζ_{ik} gleich -1 sein; es ist dann

$$\overline{Y}_n(\alpha_{ik}) = 0, \quad \overline{Y}_n(\beta_{ik}) = 0.$$

ir wählen $\varrho > 0$ so, daß für alle (i, k)

$$2\varrho < \zeta_{ik}$$

ird und definieren zunächst

$$Y_n(t) = \overline{Y}_n(t) \text{ für alle } t \text{ in } \zeta_{ik},$$

e Intervalle $< \alpha_{ik}, \alpha_{ik} + \varrho >$ und $< \beta_{ik} - \varrho, \beta_{ik} >$ ausgenommen, wo $_n(t)$ gleich denjenigen ganzen linearen Funktionen gesetzt wird, die die erte

$$Y_n(\alpha_{ik}) = 0, \quad Y_n(\alpha_{ik} + \varrho) = -1,$$

w.

$$Y_n(\beta_{ik} - \varrho) = -1, \quad Y_n(\beta_{ik}) = 0$$

nehmen. Wäre die Funktion $\overline{Y}_n(t)$ in ζ_{ik} gleich $+1$, so hätte man sie den Intervallen $< \beta_{ik}, \beta_{ik} + \varrho >$ und $< \alpha_{ik} - \varrho, \alpha_{ik} >$ durch analoge terpolationen zu modifizieren. Diese Modifikationen werden in allen ζ_{ik} rchgeführt. Die Funktion $Y_n(t)$ unterscheidet sich von $\overline{Y}_n(t)$ in gewissen

Intervallen, deren jedes die Länge ϱ hat und deren Anzahl endlich u von ϱ unabhängig ist. Der Wert des Integrals

$$\int_{\zeta_{ik}} \overline{Y}_n(t)\,dA(t)$$

erleidet eine Änderung, deren Betrag

$$\left|\int_{\zeta_{ik}} Y_n(t)\,dA(t) - \int_{\zeta_{ik}} \overline{Y}_n(t)\,dA(t)\right| =$$

$$= \left|\int_{\alpha_{ik}}^{\alpha_{ik}+\varrho} [Y_n(t) - \overline{Y}_n(t)]\,dA(t) + \int_{\beta_{ik}-\varrho}^{\beta_{ik}} [Y_n(t) - \overline{Y}_n(t)]\,dA(t)\right| \leqq$$

$$\leqq \int_{\alpha_{ik}}^{\alpha_{ik}+\varrho} |dA(t)| + \int_{\beta_{ik}-\varrho}^{\beta_{ik}} |dA(t)|$$

nicht größer als die Summe der Schwankungen von $A(t)$ in $<\alpha_{ik},\ \alpha_{ik}+\varrho$ und $<\beta_{ik}-\varrho,\ \beta_{ik}>$ ist. Für $\varrho \to 0$ konvergiert jene Summe gegen N weshalb auch

$$\int_a^b Y_n(t)\,dA(t) \to \int_a^b \overline{Y}_n(t)\,dA(t). \tag{30}$$

Da aber $\overline{Y}_n(t)$ die Ungleichheit (29) erfüllt, so ist offenbar für ein stimmtes hinreichend kleines $\varrho = \varrho_n$

$$\int_a^b Y_n(t)\,dA(t) > \eta. \tag{31}$$

Nun ist aber, außer in den Intervallen ζ_{ik}, deren Gesamtlänge kleiner $\varepsilon = \frac{1}{n}$ ist, $Y_n(t) = 0$. In jenen Intervallen ist aber

$$|Y_n(t)| \leqq 1;$$

es ist also

$$\int_a^b |Y_n(t)|\,dt < \frac{1}{n}. \tag{32}$$

Da $Y_n(t)$ stetig ist, so gilt (27) und ergibt mit Rücksicht auf (31)

$$F(Y_n) > \eta > 0 \tag{33}$$

für alle n. Wegen Stetigkeit I der Operation $F(X)$ und wegen (32) ist indes

$$F(Y_n) \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty,$$

was (33) widerspricht. Damit ist die Totalstetigkeit von $A(t)$ bewie $A(t)$ ist also ein Integral.

Es sei nun $A'(t)$ die Ableitung von $A(t)$. Die Integrationstheorie le

1. $A'(t)$ gehört zu S,

2. $$\int_a^t A'(t)\,dt = A(t) - A(a),$$

nd

34) $$\int_a^b X(t)\,dA(t) = \int_a^b X(t)\,A'(t)\,dt$$

ir alle stetigen $X(t)$. Die Formeln (27) und (34) ergeben für alle zu gehörenden X

35) $$F(X) = \int_a^b A'(t)\,X(t)\,dt.$$

s sei nun X ein Punkt von B. Nach bekannten Sätzen existiert dann C eine Punktfolge $\{X_n\}$, so daß

36) $$\int_a^b |X(t) - X_n(t)|\,dt \to 0$$

nd

37) $$|X_n(t)| \leqq \text{obere Grenze von } |X(t)| = M$$

lt[12]). Aus (36) und (37) folgt[13])

38) $$\int_a^b A'(t)\,X_n(t)\,dt \to \int_a^b A'(t)\,X(t)\,dt.$$

us (35) folgt, da X_n zu C gehört,

39) $$\int_a^b A'(t)\,X_n(t)\,dt = F(X_n).$$

us (36) und aus der Stetigkeit von $F(X)$ in BI folgt

40) $$F(X_n) \to F(X).$$

ie Beziehungen (38), (39) und (40) ergeben

$$F(X) = \int_a^b A'(t)\,X(t)\,dt$$

r alle zu B gehörenden X, womit der Satz 3 endgültig bewiesen ist.

---

[12]) Es genügt $X_n(t)$ als den Mittelwert (vom Index n) der Fourierschen Entwickelung von $X(t)$ anzunehmen. Bezeichnet $\sigma_n(t)$ die Partialsumme selbst, so ist $\int_a^b (X(t) - \sigma_n(t))^2\,dt \to 0$, also auch $\int_a^b |X(t) - \sigma_n(t)|\,dt \to 0$, woraus leicht

$$\int_a^b \left|X(t) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sigma_n(t)\right| dt \to 0$$

gt.

[13]) Vgl. den Beweis der Umkehrung des Satzes 3.

Beweis der Umkehrung des Satzes 3. Es ist klar, daß für jed zu S gehörende H das Integral (14) eine in ganz B_M additive Operati in X darstellt. Die Stetigkeit jener Operation, die wir bereits im Schl von (36) und (37) auf (38) benutzt haben, beweist man folgendermaße

Aus

$$\int_a^b |X_n(t) - X(t)|\,dt \to 0$$

folgt, daß man für ein jedes $\varepsilon > 0$ einen Index $N(\varepsilon)$ angeben kann, daß für $n > N$ die Menge $E(\varepsilon)$ der Punkte t, für welche

$$|X_n(t) - X(t)| \geqq \varepsilon \tag{41}$$

ist, das Maß $e(\varepsilon) < \varepsilon$ hat.

Andererseits ist bekanntlich für $e(\varepsilon) \to 0$

$$\int_{E(\varepsilon)} |H(t)|\,dt \to 0. \tag{42}$$

Ist also $\eta > 0$, und wählt man ε_1, so daß

$$\varepsilon_1 \int_a^b |H(t)|\,dt < \eta/2$$

wird, ferner ein $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, so daß

$$2M \int_{E(\varepsilon_2)} |H(t)|\,dt < \eta/2$$

gilt, so wird man für $n > N(\varepsilon_2)$ die Ungleichheiten erhalten:

$$|F(X_n) - F(X)| = \left|\int_a^b H(t)[X_n(t) - X(t)]\,dt\right| \tag{43}$$

$$\leqq \int_a^b |H(t)|\,|X_n(t) - X(t)|\,dt = \int_{E(\varepsilon_2)} + \int_{CE(\varepsilon_2)} \quad (CE(\varepsilon_2) = \text{Komplementärmenge v}$$

$$\leqq \int_{E(\varepsilon_2)} (|X_n(t)| + |X(t)|)H(t)\,dt + \varepsilon_2 \int_a^b |H(t)|\,dt$$

$$\leqq 2M \int_{E(\varepsilon_2)} |H(t)|\,dt + \varepsilon_2 \int_a^b |H(t)|\,dt < \eta,$$

womit die Stetigkeit von $F(X)$ in $B_M I$ bewiesen ist.

Parallelsatz 3. Legt man das T-System als Koordinatensystem grunde, so gilt für eine in $B_M I$ erklärte additive und stetige Opera $F(X)$ immer

$$F(X) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k x_k, \tag{44}$$

o $\{h_k\}$, $\{x_k\}$ die T-Koordinaten der Funktion H, deren Existenz in S er Satz 3 verbürgt, bzw. von X sind.

Beweis. Nach Satz 3 ist

5) $$F(X)=\int_a^b H(t)\,X(t)\,dt;$$

n daraus (44) zu erhalten, genügt es, in dem Beweise des Parallel- tzes 1 überall H mit X, $\{h_k\}$ mit $\{x_k\}$ zu vertauschen, da ja jetzt H S, X zu B gehört. So erhält man (23) und, unter Heranziehung von 5), die Formel (44), w. z. b. w.

Umkehrung des Parallelsatzes 3. Ist die Linearform

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k x_k$$

r *alle* Folgen $\{x_k\}$, die als T-Koordinaten von Punkten in B_M gedeutet erden können, im Mittel konvergent, so ist $\{h_k\}$ die T-Koordinatenfolge nes zu S gehörenden Punktes und die Linearform stellt eine in $B_M I$ klärte, stetige, additive Operation in bezug auf X dar.

Beweis. Setzt man

6) $$H_n^{(1)}(t)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)h_k\psi_k(t),$$

ist nach Voraussetzung

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b H_n^{(1)}(t)\,X(t)\,dt$$

r alle zu B_M (und für alle zu B) gehörenden X vorhanden. Definieren wir

7) $$F(X)=\lim_{n\to\infty}\int_a^b H_n^{(1)}(t)\,X(t)\,dt,$$

wird $F(X)$ augenscheinlich in ganz B_M erklärt und additiv sein und e Beziehung (44) erfüllen. Man hat nur noch zu zeigen, daß $F(X)$ in $_M I$ stetig ist[14]). Zunächst bemerken wir, daß nach Hilfssatz 3 und ch Voraussetzung das Integral

$$\int_a^b |H_n^{(1)}(t)|\,dt$$

r alle n unterhalb einer festen, positiven Schranke R bleibt. Wäre nun (X) nicht stetig, so würde eine Folge $\{X_p\}$ existieren, so daß

$$X_p \to X \text{ in } B_M I$$

[14]) Diesen Ansatz zum Beweise verdanke ich Herrn St. Banach.

gälte, während zugleich die Beziehung

$$F(X_p) \to F(X)$$

nicht erfüllt wäre. Setzt man

$$X - X_p = Y_p,$$

so erhält man für $p \to \infty$

$$\int_a^b |Y_p(t)|\,dt \to 0,$$

$$F(Y_p) \not\to 0.$$

Aus der Folge $\{Y_p\}$ könnte man demnach eine Folge $\{Z_p\}$ aussonde so daß

$$\int_a^b |Z_p(t)|\,dt \to 0 \tag{48}$$

und für alle p

$$|F(Z_p)| > \eta > 0 \tag{49}$$

wäre. Ist nun $\Pi(\varepsilon)$ diejenige Menge in $<a, b>$, für welche

$$|Z_p| < \varepsilon$$

gilt, so ist

$$\left|\int_{\Pi(\varepsilon)} H_n^{(1)}(t) Z_p(t)\,dt\right| < R\varepsilon.$$

Für

$$2R\varepsilon < \eta, \quad \text{d. h.} \quad \varepsilon < \frac{\eta}{2R}$$

folgt hieraus

$$\lim_{n\to\infty} \left|\int_{\Pi(\varepsilon)} H_n^{(1)}(t) Z_p(t)\,dt\right| \leqq \eta/2. \tag{50}$$

Bezeichnet man die Komplementärmenge von $\Pi(\varepsilon)$ in $<a, b>$ $K(\varepsilon)$, so folgt aus (47), (49) und (50)

$$\lim_{n\to\infty} \left|\int_{K(\varepsilon)} H_n^{(1)}(t) Z_p(t)\,dt\right| > \eta/2. \tag{51}$$

Wird nun ε festgehalten, etwa $\varepsilon = \frac{\eta}{3R}$ gesetzt, so bleibt K nur vo abhängig, so daß wir $K = K(p)$ schreiben können. Wegen (48) k vergiert

$$\text{für } p \to \infty \text{ das Maß von } K(p) \to 0. \tag{52}$$

Die Beziehung (51) erlaubt eine Zahl $n = N(p)$ zu bestimmen, so d

$$\left|\int_{K(p)} H_{N(p)}^{(1)}(t) Z_p(t)\,dt\right| > \eta/2 \tag{53}$$

sei. Wir wollen jetzt die Wertänderung abschätzen, welche der Ausdr (53) erfährt, wenn man anstatt $K(p)$ $K^*(p)$ setzt,

Def)
$$K^*(p) = K(p) - \Lambda(p),$$
$$\text{Maß von } \Lambda(p) = \delta_p.$$

er Betrag dieser Wertänderung wird — wegen $|Z_p| \leqq 2M$ —
$$2M \int_{\Lambda(p)} \left| H^{(1)}_{N(p)}(t) \right| dt = 2M\, o_p(\delta_p)$$

cht übertreffen, wo $o_p(\delta_p)$ mit δ_p gegen Null strebt.

Ist also δ_p klein genug ($\delta_p < \beta_p$), so wird diese Wertänderung kleiner $\frac{\eta}{12}$ sein; aus der Ungleichheit (53) folgt

4)
$$\left| \int_{K^*(p)} H^{(1)}_{N(p)}(t)\, Z_p(t)\, dt \right| > \frac{5\eta}{12}$$

$\delta_p < \beta_p$, wo β_p eine positive Zahl bezeichnet. Wegen (52) ist es öglich, eine Folge von Indizes $\{p_\nu\}$ sukzessive zu bestimmen, so daß

5) das Maß von $K(p_2) + \text{d. M. v. } K(p_3) + \ldots + \text{d. M. v. } K(p_\nu) + \ldots < \beta_{p_1}$,
$$\text{d. M. v. } K(p_3) + \ldots + \text{d. M. v. } K_{(p_\nu)} + \ldots < \beta_{p_2},$$
w. gilt.

Definieren wir:

6)
$$\Lambda(p_1) = K(p_2) + K(p_3) + \ldots,$$
$$\Lambda(p_2) = \quad K(p_3) + \ldots,$$

gemein
$$\Lambda(p_\nu) = \sum_{k=\nu+1}^{\infty} K(p_k), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

kommt wegen (54), (55) und (56)

7)
$$\left| \int_{K^*(p_\nu)} H^{(1)}_{N(p_\nu)}(t)\, Z_{p_\nu}(t)\, dt \right| > \frac{5\eta}{12}.$$

$K^*(p_\nu) = K(p_\nu) - \Lambda(p_\nu)$ ist, so sind alle $K^*(p_\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ ereinander *punktfremd*. Wir können daher eine Funktion $Z(t)$, die B_M gehört, folgendermaßen definieren:

8)
$$Z(t) = \pm Z_{p_\nu}(t) \text{ für die zu } K^*(p_\nu) \text{ gehörenden } t,$$
$$Z(t) = 0 \qquad \text{sonst.}$$

Die Vorzeichen werden nachträglich bestimmt werden. Wie sie aber h seien, ist

$$(59)\quad \begin{cases} \int_a^b H^{(1)}_{N(p_\nu)}(t)Z(t)\,dt = \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_{K^*(p_\mu)} H^{(1)}_{N(p_\nu)}(t)[\pm Z_{p_\nu}(t)]\,dt \\ = \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \int_{K^*(p_\mu)} H^{(1)}_{N(p_\nu)}(t)Z_{p_\mu}(t)\,dt \pm \int_{K^*(p_\nu)} H^{(1)}_{N(p_\nu)}(t)Z_{p_\nu}(t)\,dt \\ + \sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} \int_{K^*(p_\mu)} H^{(1)}_{N(p_\mu)}(t)[\pm Z_{p_\mu}(t)]\,dt. \end{cases}$$

Von den drei Summanden, in welche (59) zerfällt, ist der Betrag d letzten kleiner als $\eta/12$, da er doch gleich

$$\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} \int_{K^*(p_\mu)} Z(t)H^{(1)}_{N(p_\nu)}(t)\,dt$$

ist, und, da $K^*(p)$ immer in $K(p)$ enthalten ist, wegen (55) das M von $\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} K^*(p_\mu)$ $\leqq$ das Maß von $\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} K(p_\mu) < \beta_{p_\nu}$ ist. Der Betrag zweiten Summanden ist nach (57) größer als $\frac{5\eta}{12}$. Wir können durch V zeichenwahl also erreichen, daß der zweite Summand

$$> \frac{5\eta}{12} \quad \text{oder} \quad < -\frac{5\eta}{12}$$

wird. Die Summe des zweiten und des dritten Summanden wird da sicher

$$> \frac{5\eta}{12} - \frac{\eta}{12} \quad \text{oder} \quad < -\frac{5\eta}{12} + \frac{\eta}{12}$$

sein. Wir können also durch die Vorzeichenwahl in der Definition Werte (58), die $Z(t)$ in $K^*(p_\nu)$ annehmen soll, den Wert von (wenigstens um $2\cdot\frac{\eta}{3}$ ändern, auch noch, nachdem die Vorzeichen in $K^*(p_1)$ $K^*(p_2), \ldots, K^*(p_{\nu-1})$ gewählt worden sind und infolgedessen der W des ersten Summanden feststeht. Ist also irgendeine Zahl L gegeb so kann man durch die Vorzeichenwahl in $K^*(p_\nu)$ erreichen, daß der W von (59) von L um mehr als $\frac{\eta}{3}$ abweicht und diese Abweichung trotz späteren Vorzeichenwahl (in $K^*(p_{\nu+1})$ usw.) erhalten bleibt. Die W der Vorzeichen wird nun sukzessive wie folgt getroffen.

In $K^*(p_1)$ sei $Z(t) = +Z_{p_1}(t)$.

Ist nun der Wert von $Z(t)$ in $K^*(p_1)$ bestimmt, so kann man reits das Integral

$$\int_a^b H^{(1)}_{N(p_1)}(t)Z(t)\,dt$$

it der Genauigkeit von $2 \cdot \frac{\eta}{12} = \frac{\eta}{6}$ berechnen, wie die Darstellung (59) it $N = 1$, d. h. ohne ersten Summanden lehrt. Es ist also

$$J_1 = \int_a^b H^{(1)}_{N(p_1)}(t) Z(t)\, dt = L_1 \pm \Theta_1 \frac{\eta}{12}, \qquad (0 < \Theta_1 < 1)$$

obei L_1 bekannt ist.

Man kann nun das Vorzeichen von $Z(t)$ in $K^*(p_2)$ so bestimmen, aß die Zahl

$$J_2 = \int_a^b H^{(1)}_{N(p_2)}(t) Z(t)\, dt$$

n wenigstens $\frac{\eta}{3}$ von L_1, mithin um wenigstens $\frac{\eta}{4}$ von J_1 abweicht. All-emein: hat man die Vorzeichen von $Z(t)$ in $K^*(p_1), K^*(p_2), \ldots, K^*(p_\nu)$ estimmt, so kann man

$$J_\nu = \int_a^b H^{(1)}_{N(p_\nu)}(t) Z(t)\, dt = L_\nu \pm \Theta_\nu \frac{\eta}{12} \qquad (0 < \Theta_\nu < 1)$$

it einer Genauigkeit von $2 \cdot \frac{\eta}{12}$ berechnen, und man kann das Vorzeichen on $Z(t)$ in $K^*(p_{\nu+1})$ so wählen, daß die Zahl $J_{\nu+1}$ von L_ν um wenig-ens um $\frac{\eta}{3}$, mithin von J_ν um wenigstens $\frac{\eta}{4}$ abweicht.

Es ist dann

$$|J_1 - J_2| > \frac{\eta}{4}, \ldots |J_{\nu+1} - J_\nu| > \frac{\eta}{4}, \ldots$$

Die Folge $\{J_\nu\}$, d. h.

$$\left\{ \int_a^b H^{(1)}_{N(p_\nu)}(t) Z(t)\, dt \right\},$$

t demnach entgegen der Voraussetzung divergent. — Es ist also $F(X)$ $B_M I$ stetig. —

Es bleibt noch zu beweisen, daß $\{h_k\}$ die T-Koordinatenfolge eines S gehörenden Punktes ist.

Wie eben gezeigt wurde, ist $F(X)$ durch die Formel (47) in ganz $_M I$ erklärt, außerdem additiv und stetig. Nach Satz 3 gilt also in $B_M I$

$$F(X) = \int_a^b H(t) X(t)\, dt,$$

d H gehört zu S. Wählt man eine positive Konstante c_k, so daß

$$|c_k \psi_k(t)|$$

e wesentliche obere Grenze habe, die M nicht übertrifft, so darf man

in der letzten Formel X durch $c_k \psi_k$ ersetzen; dieselbe Substitution da man in (47) vornehmen. Der Vergleich beider Formeln liefert:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b H_n^{(1)}(t)\psi_k(t)\,dt = \int_a^b H(t)\psi_k(t)\,dt.$$

Greift man jetzt auf die Definition (46) zurück, so erhält man

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-k+1}{n} h_k = \int_a^b H(t)\psi_k(t)\,dt$$

oder

$$\int_a^b H(t)\psi_k(t)\,dt = h_k.$$

Die Koeffizienten $\{h_k\}$ der Linearform sind also die T-Koordinaten v H. — Damit ist die Umkehrung des Parallelsatzes 3 vollständig bewiesen.

Anwendungen.

Die Parallelsätze 1 und 3 sowie ihre Umkehrungen gestatten gewis Anwendungen auf die Theorie der Fourierschen Reihen. Es handelt si dabei um das folgende Problem:

Ist

(60) $$h_1\psi_1(t) + h_2\psi_2(t) + \ldots + h_k\psi_k(t)\ldots$$

eine Fouriersche Reihe und

(61) $$\lambda_1 h_1 \psi_1(t) + \lambda_2 h_2 \psi_2(t) + \ldots + \lambda_k h_k \psi_k(t)$$

die durch Multiplikation der Terme der Reihe (60) mit den Gliede einer Folge

(62) $$\{\lambda_k\}$$

entstandene Reihe, so erhebt sich die Frage, ob (61) noch eine Fouriersc Reihe ist? Die Bedingung

$$|\lambda_k| \leqq \text{konstant}$$

ist wohl notwendig, aber *nicht hinreichend*, damit die numerische Folge (6 die Eigenschaft habe, jede Fouriersche Reihe (60) in eine Fouriersc Reihe (61) zu verwandeln. Letztere Bemerkung ist das Ergebnis ei von Herrn St. Banach konstruierten Beispiels[15]).

Es gelten nun folgende Sätze:

Satz 4. Hat die numerische Folge $\{\lambda_k\}$ die Eigenschaft, jede nur rische, im Mittel konvergente Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

[15]) Dieses Beispiel, welches demnächst der Krakauer Akademie der Wiss schaften vorgelegt werden wird, erwähne ich mit freundlicher Erlaubnis des Aut

n eine im Mittel konvergente Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k$$

u verwandeln, so verwandelt sie auch jede Fouriersche Reihe (60) in ine Fouriersche Reihe (61).

Beweis. Ist (60) eine Fouriersche Reihe, so ist, wie in dem Beweise es Parallelsatzes 1 auseinandergesetzt wurde,

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k x_k$$

ir alle Folgen $\{x_k\}$, die als T-Koordinaten von in B gelegenen Punkten ufgefaßt werden können, im Mittel konvergent. Nach Voraussetzung des atzes 4 ist dann auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k h_k x_k$$

n Mittel konvergent. Nach der Umkehrung des Parallelsatzes 3 ist also $\lambda_k h_k\}$ die T-Koordinatenfolge eines zu S gehörenden Punktes, w. z. b. w.

Bemerkung 1. Sind alle λ_k, $\Delta\lambda_k$, $\Delta^2\lambda_k$ nicht negativ, so trifft nach . Hardy die Voraussetzung des Satzes 4 zu[16]).

Bemerkung 2. Eine vom Verfasser gestellte Frage, wie die numeschen Folgen $\{\lambda_k\}$ beschaffen seien, die alle im Mittel konvergenten Reihen $\sum_{=1}^{\infty} a_k$ in im Mittel konvergente Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k$ verwandeln, hat Herr t. Mazurkiewicz beantwortet. Er gab eine notwendige und hinreichende edingung für diese Eigenschaft an[17]).

Satz 5. Hat die numerische Folge $\{\lambda_k\}$ die Eigenschaft, jede numesche im Mittel konvergente Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

---

[16]) G. H. Hardy, On the summability of Fouriers series, Proceedings of the ondon Mathematical Society 1913, Ser. 2, Vol. 12, Part. 5, S. 364—372.

[17]) St. Mazurkiewicz, O umowalności szeregów kształtu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$, Comptes endus de la Société des Sciences de Varsovie 1915, VIII Année, Fascicule 8, S. 649 s 655. Die Bedingung lautet: $\Delta\lambda_n \to 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} |n\Delta^2\lambda_n|$ konvergiert.

von endlicher Quadratsumme

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$$

in eine im Mittel konvergente Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k$$

zu verwandeln, so verwandelt sie auch jede Fouriersche Reihe (60) eine Fouriersche Reihe (61).

Beweis. In dem Beweise des Satzes 4 ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} h_k x_k$ für a zu B gehörenden X nicht nur im Mittel konvergent, sondern auch v endlicher Quadratsumme, da ja

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$$

endlich und

$$h_k \to 0, \qquad h_k^2 \to 0$$

ist, wenn (60) eine Fouriersche Reihe ist. Diese Feststellung erlau den Beweis des Satzes 4 so zu ändern, daß man den schärferen Satz erhält.

Bemerkung 3. Satz 5 gibt zu folgender Frage Anlaß: Welch sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß eine Fo $\{\lambda_k\}$ die Voraussetzung des Satzes 5 erfüllt? So ist z. B. die Bedingu „$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2$ konvergent" hinreichend, aber nicht notwendig, da ja die Hardysch $\{\lambda_k\}$ der Bemerkung 1, z. B. $\lambda_k = \left|\frac{1}{\sqrt{k}}\right|$, sicher die Voraussetzungen Satzes 5 erfüllen.

Satz 6. Damit eine numerische Folge $\{\lambda_k\}$ die Eigenschaft habe, j Fouriersche Reihe (60) immer in eine Fouriersche Reihe (61) zu v wandeln, ist es notwendig und hinreichend, daß sie jede Fouriersche Re einer beschränkten Funktion in eine Fouriersche Reihe einer beschränk Funktion verwandle.

Beweis. Ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k \psi_k(t)$$

eine Fouriersche Reihe, so ist wegen (23)

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k x_k$$

ür alle X von B_M, also auch für alle X von B im Mittel konvergent. st nun stets

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k \psi_k(t)$$

ine Fouriersche Reihe einer beschränkten Funktion, wenn

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \psi_k(t)$$

ine Fouriersche Reihe einer beschränkten Funktion ist, so muß nach (23)

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k \lambda_k x_k$$

uch im Mittel konvergent sein, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \psi_k(t)$ eine Fouriersche Reihe iner beschränkten Funktion ist.

Es ist darum

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k h_k x_k$$

ür alle X von B im Mittel konvergent. Nach der Umkehrung des Parallelsatzes 3 reicht dies hin, um schließen zu können, daß

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k h_k \psi_k(t)$$

ine Fouriersche Reihe ist. Die Bedingung des Satzes 6 ist also hinreichend. Der Beweis, daß sie notwendig ist, ist dem zuletzt geführten nalog, nur muß Parallelsatz 3 und dessen Umkehrung durch den Parallelatz 1 und dessen Umkehrung ersetzt werden.

Satz 7. Genügt die numerische Folge $\{\lambda_k\}$ den Voraussetzungen des atzes 4 oder des Satzes 5, so verwandelt sie jede Fouriersche Reihe iner beschränkten Funktion in die Fouriersche Reihe einer beschränkten unktion.

Beweis: Folgt aus Satz 6 und Satz 4 bzw. 5.

Satz 8. Damit die Folge $\{\lambda_k\}$ die Eigenschaft habe, jede Fouriersche Reihe einer mit ihrem Quadrate integrierbaren Funktion in die ouriersche Reihe einer ebensolchen Funktion zu verwandeln, ist es inreichend und notwendig, daß die Folge

$$\{\lambda_k\}$$

eschränkt sei.

Beweis: Folgt aus dem Riesz-Fischerschen Satze.

Bemerkung 4. Satz 8 ist, wie alles, was S^2 betrifft, bekannt, u wurde hier nur der Vollständigkeit halber aufgenommen. Er ist allgemei als die anderen Sätze insofern, als er auch andere als T-Entwicklung betrifft.

Bemerkung 5. Da nur beschränkte Folgen $\{\lambda_k\}$ die Voraussetzung der Sätze 4 und 5 erfüllen, so verwandeln nach Satz 8 die Folgen $\{\lambda$ der Sätze 4 oder 5 die Fourierschen Reihen der samt ihren Quadrat integrierbaren Funktionen in Fouriersche Reihen ebensolcher Funktione Die Beziehung, die zwischen Fourierschen Reihen integrierbarer u beschränkter Funktionen nach Satz 6 besteht, gilt nicht in analoger Wei für die quadratisch integrierbaren Funktionen. Die Beschränktheit d Folge $\{\lambda_k\}$, welche laut Satz 8 nötig ist und hinreicht, um zu schließe daß (61) eine Fouriersche Reihe einer mit ihrem Quadrate integrierbar Funktion ist, falls (60) eine solche Reihe ist, erlaubt noch nicht, wie d am Anfang dieses Kapitels erwähnte Banachsche Beispiel lehrt, schließen, daß $\{\lambda_k\}$ *alle* Fouriersche Reihen in Fouriersche Reih verwandelt.

Hilfssätze.

Hilfssatz 1. Ist $H(t)$ eine integrierbare, nicht wesentlich beschränk Funktion, so kann man eine Folge von beschränkten Funktionen $\{X_n(t$ finden, so daß für $n \to \infty$

$$\int_a^b |X_n(t)|\,dt \to 0,$$

$$\int_a^b H(t)\,X_n(t)\,dt \to +\infty.$$

Beweis. Bestimmen wir die Menge E_r der t-Punkte, für welche

$$r > |H(t)| \geqq r-1 \qquad (r = 1, 2, \ldots$$

ist, und es sei ε_r das Maß von E_r.

Nach Voraussetzung sind in der Folge $\{\varepsilon_r\}$ unendlich viele Glie von Null verschieden; sie bilden eine Teilfolge

$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p, \ldots,$$

welcher die Teilfolge der Folge $\{E_r\}$

$$F_1, F_2, \ldots, F_p, \ldots$$

entspricht. Es ist

$$M_p + 1 > H(t) \geqq M_p \text{ in } F_p$$

und

$$M_{p+1} > M_p, \quad \lim_{p\to\infty} M_p = +\infty.$$

Die Reihe

$$\sum_{p=1}^{\infty} \eta_p$$

konvergiert, da doch die $\{E_r\}$ und ebenso die $\{F_p\}$ untereinander punktremd sind; man kann darum wegen $M_p \to \infty$ eine Folge von positiven Zahlen $\{\varrho_p\}$ bestimmen, so daß

$$\sum_{p=1}^{\infty} \varrho_p \eta_p$$

konvergiert, während zugleich

$$\sum_{p=1}^{\infty} \varrho_p M_p \eta_p$$

divergiert. Nun bestimmen wir eine zahlentheoretische Funktion $\varkappa(n)$ von n, so daß

$$\varkappa(n) > n, \qquad \sum_{p=n}^{p=\varkappa(n)} \varrho_p M_p \eta_p \to \infty \quad \text{für } n \to \infty$$

gilt, was wegen der Divergenz der zuletzt hingeschriebenen unendlichen Reihe erfüllbar ist, und setzen

$$\lambda_{np} = \varrho_p \quad \text{für} \quad n \leqq p \leqq \varkappa(n),$$
$$\lambda_{np} = 0 \quad \text{für} \quad p < n, \; p > \varkappa(n).$$

Nach diesen Vorbereitungen definieren wir $X_n(t)$ folgendermaßen:

$$|X_n(t)| = \lambda_{np} \text{ in } F_p \text{ für alle } p,$$
$$|X_n(t)| = 0 \quad \text{sonst,}$$

schließlich

$$\operatorname{sign} X_n(t) = \operatorname{sign} H(t) \text{ in ganz } <a, b>.$$

Da für ein gegebenes n nur endlich viele λ_{np} von Null verschieden sind, ist $X_n(t)$ eine beschränkte Funktion. Man hat ferner

$$\int_a^b |X_n(t)|\,dt = \sum_{p=1}^{\infty} \int_{F_p} |X_n(t)|\,dt = \sum_{p=1}^{\infty} \lambda_{np}\eta_p = \sum_{p=n}^{p=\varkappa(n)} \varrho_p \eta_p \leqq \sum_{p=n}^{\infty} \varrho_p \eta_p,$$

welch letzterer Ausdruck mit $n \to \infty$ gegen Null konvergiert. Andererseits gilt

$$\int H(t) X_n(t)\,dt = \int_a^b |H(t) X_n(t)|\,dt = \sum_{p=1}^{\infty} \int_{F_p} |H(t) X_n(t)|\,dt \geqq$$

$$\geqq \sum_{p=n}^{p=\varkappa(n)} \int_{F_p} |H(t) X_n(t)|\,dt \geqq \sum_{p=n}^{p=\varkappa(n)} M_p \lambda_{np} \eta_p = \sum_{p=n}^{p=\varkappa(n)} \varrho_p M_p \eta_p,$$

welch letzterer Ausdruck aber mit p gegen $+\infty$ strebt.

Hilfssatz 2. Ist $\sum_{k=1}^{\infty} h_k^2$ divergent, so existiert eine Folge $\{x_k\}$, so da

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$$

konvergiert und

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k x_k$$

gegen $+\infty$ im eigentlichen Sinne divergiert.

Beweis. Nehmen wir $h_1 \neq 0$ an und setzen

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} h_k^2.$$

Da $\sum_{k=1}^{\infty} h_k^2$ divergent vorausgesetzt wurde, so ist nach einem Abelsch Satze über Reihen mit positiven Gliedern

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k^2}{\left| \sigma_k^{1+\varrho} \right|}$$

für jedes positive ϱ konvergent, für jedes negative ϱ „eigentlich" divergent[18] setzt man daher

$$x_n = \frac{h_n}{\left| \sigma_n^{\frac{2}{3}} \right|},$$

so wird sich die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{\left| \sigma_n^{1+\frac{1}{3}} \right|}$$

als konvergent, dagegen die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{\left| \sigma_n^{1-\frac{1}{3}} \right|}$$

als gegen $+\infty$ divergent erweisen. Ist $h_1 = 0$, so beweist man den Sa für die Reihe $(1 + h_1)^2 + \sum_{k=2}^{\infty} h_k^2$, woraus dann seine Gültigkeit für d Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} h_k^2$ folgt.

Bemerkung. Der Hilfssatz 2 ist elementar und längst bekann er spielt in der Theorie der quadratischen Formen mit unendlich viel Variablen eine Rolle.

---

[18]) J. Tannery, Introduction à la théorie des fonctions d'une variable réel Paris 1904; Bd. I, § 130, S. 183—187.

Hilfssatz 3. Ist für alle beschränkten Funktionen $X(t)$

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b G_n(t)\,X(t)\,dt$$

orhanden, so muß

$$\int_a^b |G_n(t)|\,dt$$

nterhalb einer von n unabhängigen Schranke L liegen; dabei wird jede unktion $G_n(t)$ als beschränkt angenommen.

Beweis. Nehmen wir an, der Satz sei unrichtig. Es ist dann

$$\limsup_{n\to\infty}\int_a^b |G_n(t)|\,dt = +\infty.$$

Vir bezeichnen mit M_i die wesentliche obere Grenze von $G_i(t)$, mit N_i en Wert des Integrals

$$\int_a^b |G_i(t)|\,dt;$$

ist also: $\limsup_{n\to\infty} N_i = +\infty$.

Wir definieren ferner

$$f_i(t) = \operatorname{sign} G_i(t),$$

so

$$|f_i(t)| \leqq 1,$$

nd führen eine konvergente Reihe mit positiven Gliedern

$$\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i$$

n, deren Glieder sukzessive bestimmt werden. Ist dann $\{n_i\}$ irgendeine olge wachsender Indizes, so ist

$$X(t) = \sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i f_{n_i}(t)$$

ne unbedingt und gleichmäßig konvergente Reihe; es folgt:

$$\int G_{n_1}(t)\,X(t)\,dt = \varepsilon_1\int_a^b |G_{n_1}(t)|\,dt + \sum_{i=2}^{\infty}\varepsilon_i\int_a^b G_{n_1}(t)\,f_{n_i}(t)\,dt = \varepsilon_1 N_{n_1} + R_1,$$

$$|R_1| \leqq M_{n_1}\sum_{i=2}^{\infty}\varepsilon_i.$$

tzt wählen wir $\varepsilon_1 = 1$ und n_1 so groß, daß

$$\varepsilon_1 N_{n_1} > 1 + \eta \qquad (\eta \text{ eine feste positive Zahl})$$

sei; wir legen ferner den $\{\varepsilon_i\}$ die Bedingung

$$M_{n_1} \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i \leqq \eta$$

auf; es folgt

$$\int_a^b G_{n_1}(t)\, X(t)\, dt > 1.$$

Hat man $n_1, n_2, \ldots, n_k, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{k+1}$ bereits bestimmt, so findet m
n_{k+1} wie folgt. Es ist

$$\int_a^b G_{n_{k+1}}(t)\, X(t)\, dt = \int_a^b G_{n_{k+1}}(t) \sum_{i=1}^{i=k} \varepsilon_i f_{n_i}(t)\, dt + \varepsilon_{k+1} \int_a^b |G_{n_{k+1}}(t)|\, dt +$$

$$+ \sum_{i=k+2}^{\infty} \varepsilon_i \int_a^b G_{n_{k+1}}(t) f_{n_i}(t)\, dt = \int_a^b G_{n_{k+1}}(t) \sum_{i=1}^{i=k} (t)\, dt + \varepsilon_{k+1} \cdot N_{n_{k+1}} + 1$$

Nach Voraussetzung strebt der erste Summand für $n_{k+1} \to \infty$ gegen ein
Grenzwert L_k; wählt man daher n_{k+1} so groß, daß der betracht
Summand von L_k um weniger als $\frac{\eta}{2}$ abweicht und daß

$$\varepsilon_{k+1} N_{n_{k+1}} > |L_k| + k + 1 + \eta$$

sei und legt man schließlich den $\{\varepsilon_i\}$ die Bedingung

$$R_k \leqq M_{n_{k+1}} \sum_{i=k+2}^{\infty} \varepsilon_i \leqq \frac{\eta}{2}$$

auf, so findet man

$$\int_a^b G_{n_{k+1}}(t)\, X(t)\, dt > k + 1.$$

Die Bestimmung der ε_i den unendlich vielen Bedingungen gemäß st
auf keine Schwierigkeiten. Es ist nämlich zunächst

$$\varepsilon_1 = 1;$$

kennt man ε_1, so bestimmt man n_1 und man hat die Bedingung

$$M_{n_1} \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i \leqq \eta \quad \text{oder} \quad \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i \leqq \frac{\eta}{M_{n_1}}$$

zu erfüllen; man erfüllt sie, indem man zunächst

$$\varepsilon_2 < \frac{\eta}{M_{n_1}}$$

annimmt. Sind ε_1 und ε_2 bekannt, so kann man n_2 und M_{n_2} berech
und hat die Bedingung

$$\sum_{i=3}^{\infty} \varepsilon_i < \frac{\eta}{2 M_{n_2}}$$

ı erfüllen; man wählt hierzu ε_3 so klein, daß

$$\varepsilon_2 + \varepsilon_3 < \frac{\eta}{M_{n_1}}, \qquad \varepsilon_3 < \frac{\eta}{2M_{n_2}}$$

ısfällt. Allgemein sind bereits $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k$ den Ungleichungen

$$\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_k < \frac{\eta}{M_{n_1}},$$

$$\varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_k < \frac{\eta}{2M_{n_2}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varepsilon_k < \frac{\eta}{2M_{n_{k-1}}}$$

emäß bestimmt, so ist es möglich ε_{k+1} so zu bestimmen, daß die Un-eichheiten

$$\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_{k+1} < \frac{\eta}{M_{n_1}},$$

$$\varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_{k+1} < \frac{\eta}{2M_{n_2}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varepsilon_{k+1} < \frac{\eta}{2M_{n_k}},$$

lten und daß infolgedessen schließlich auch die Bedingungen

$$M_{n_1} \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i \leqq \eta, \qquad M_{n_k} \sum_{i=k+1}^{\infty} \varepsilon_i \leqq \frac{\eta}{2}$$

r alle $k \geqq 2$ erfüllt sind.

Ist nun $X(t)$ wie vorstehend definiert, so widerspricht die Ungleichheit

$$\int_a^b G_{n_{k+1}}(t) X(t)\, dt > k+1,$$

e wir abgeleitet haben, der Voraussetzung, von der wir ausgegangen ıd, so daß sich der Hilfssatz also als richtig herausstellt.

Hilfssatz 4. Sind die beschränkten Funktionen $\{K_n(t)\}$ nicht eichmäßig wesentlich beschränkt, so ist eine integrierbare Funktion $X(t)$ rhanden, so daß

$$\limsup_{n\to\infty} \int_a^b K_n(t) X(t)\, dt = +\infty$$

t. Der mir von Herrn Banach mitgeteilte Beweis dieser Variante ıes Lebesgueschen Satzes[19]) lautet im wesentlichen folgendermaßen:

[19]) Dieser Satz lautet: Soll $\int_a^b K_n(t)\, X(t)\, dt \to 0$ für alle integrierbaren $X(t)$

Zunächst bemerken wir, daß man zu einer gegebenen beschränkt Funktion $K_n(t)$ und zu einer gegebenen positiven Zahl ε immer eine b schränkte Funktion $f_n(t)$ finden kann derart, daß

$$\int_a^b |f_n(t)|\,dt = 1, \qquad \int_a^b f_n(t)\,K_n(t)\,dt > M_n - \varepsilon$$

gilt, wo M_n die wesentliche obere Grenze von $|K_n(t)|$ bezeichnet. U $f_n(t)$ zu konstruieren, braucht man nämlich nur diejenige Menge I deren Maß γ_n sicher positiv ist, zu bestimmen, auf der

$$|K_n(t)| > M_n - \varepsilon$$

ist, und

$$|f_n(t)| = \frac{1}{\gamma_n} \quad \text{in } \Gamma_n,$$

$$\operatorname{sign} f_n(t) = \operatorname{sign} K_n(t) \quad \text{in } \Gamma_n,$$

$$f_n(t) = 0 \quad \text{sonst in } <a, b>$$

zu setzen.

Nach Voraussetzung ist

$$\limsup_{n\to\infty} M_n = +\infty.$$

Man kann infolgedessen eine Indizesfolge $\{n_i\}$ sukzessive bestimmen, so d

(1^0) $\qquad M_{n_i} > 1, \qquad \lim_{i\to\infty} M_{n_i} = +\infty,$

(2^0) $\qquad M_{n_{i+1}} > M_{n_i}^2, \qquad (i = 2, 3, \ldots$

(3^0) $\qquad M_{n_i} > 4\left[\int_a^b \sum_{k=1}^{i-1} \varepsilon_i f_i(t)\,K_p(t)\,dt\right]^2$ für alle p.

Dabei ist $\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{M_{n_i}}}$, während $f_i(t)$ diejenige nach der Vorbemerkung v handene Funktion darstellt, die die Eigenschaften

$$\int_a^b |f_i(t)|\,dt = 1, \qquad \int_a^b f_i(t)\,K_{n_i}(t)\,dt > M_{n_i} - \frac{1}{i}$$

hat.

Die Unmöglichkeit, die Bedingung (3^0) sukzessive zu erfüllen, wü unmittelbar die Richtigkeit des zu beweisenden Hilfssatzes 4 mit

$$X(t) = \sum_{k=1}^{i-1} \varepsilon_i f_i(t) \quad \text{bzw.} \quad X(t) = -\sum_{k=1}^{i-1} \varepsilon_i f_i(t)$$

---

erfüllt sein, so muß 1. $\int_\alpha^\beta K_n(t)\,dt \to 0$ für alle in $<a, b>$ enthaltenen $<\alpha, \beta$

2. die Folge $\{K_n(t)\}$ gleichmäßig wesentlich beschränkt sein; die Bedingunge und 2. sind auch hinreichend.

rweisen. Man darf also (1^0), (2^0), (3^0) als sukzessive für alle i erfüllt nnehmen. Setzen wir

$$X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i f_i(t).$$

ie Funktion $X(t)$ ist integrierbar, da die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \int_a^b |f_i(t)|\, dt = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{M_{n_i}^{\frac{1}{2}}}$$

egen (1^0) und (2^0) konvergiert. Es ist

$$\int_a^b K_{n_i}(t) X(t)\, dt = \int_a^b \sum_{k=1}^{i-1} \varepsilon_k f_k(t) \cdot K_{n_i}(t)\, dt + \varepsilon_i \int_a^b f_i(t) K_{n_i}(t)\, dt +$$

$$+ \int_a^b \sum_{k=i+1}^{\infty} \varepsilon_k f_k(t) K_{n_i}(t)\, dt.$$

an hat also in der letzten Summe

$$|\text{Erster Summand}| < \tfrac{1}{2}\sqrt{M_{n_i}} \text{ (wegen } (3^0)),$$

$$\text{Zweiter Summand} > \sqrt{M_{n_i}} - \frac{1}{i\sqrt{M_{n_i}}},$$

$$|\text{Dritter Summand}| \leqq M_{n_i} \sum_{k=i+1}^{\infty} \varepsilon_k \leqq M_{n_i} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{M_{n_{i+1}}}} + \frac{1}{\sqrt{M_{n_{i+2}}}} + \ldots\right]$$

$$\leqq M_{n_i}\left[\frac{1}{M_{n_i}} + \frac{1}{M_{n_i}^2} + \frac{1}{M_{n_i}^4} + \ldots\right] \leqq \frac{M_{n_i}}{M_{n_i} - 1} \text{ (wegen } (2^0)).$$

a $M_{n_i} \to \infty$ für $i \to \infty$, so konvergiert der zuletzt hingeschriebene usdruck gegen 1, und die ganze Summe wird für genügend große i rößer als die Zahl

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{M_{n_i}} - \frac{1}{i\sqrt{M_{n_i}}} - 1,$$

e ihrerseits für $i \to \infty$ gegen $+\infty$ strebt. Man hat also für unser $X(t)$

$$\lim_{i \to \infty} \int_a^b K_{n_i}(t) X(t)\, dt = +\infty,$$

er

$$\limsup_{n \to \infty} \int_a^b K_n(t) X(t)\, dt = +\infty,$$

z. b. w.

(Eingegangen im Januar 1919.)

Über die Zerlegung der Gruppe der Restklassen ein endlichen Moduls[1]).

Von

Werner Schmeidler in Göttingen.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit ist eine Weiterführung der in meiner Diss tation[2]) begonnenen Untersuchungen über die kommutativen Grupp hyperkomplexer Größen. Während ich dort nur Gruppen endlicher O nung in Betracht zog, d. h. solche, in denen sämtliche Größen als line Verbindungen von endlich vielen Elementen darstellbar sind, wird h der allgemeinere Fall unendlicher Ordnung behandelt, in dem erst abzä bar unendlich viele Elemente eine Basis bilden in einem Sinne, der Text genauer erläutert wird. Ich untersuche aber nicht die allgemeins Gruppen dieser Art, sondern nur diejenigen, auf die eine naturgem Verallgemeinerung der in meiner Arbeit *Zur Theorie der primären Pun moduln* [Mathematische Annalen, Bd. 79 (1918) S. 56—75, im folgen zitiert mit P.] dargelegten Beziehungen der Gruppen zu den Moduln endlich vielen Variablen führt. Gehörte dort zu einer endlichen Gru eine gewisse Klasse von *Punkt*moduln, als deren Gruppe der Restklas die gegebene Gruppe aufgefaßt werden kann, so gehe ich hier von ein ganz beliebigen Modul von endlich vielen Variablen aus und behan seine Gruppe der Restklassen, sowie die Klasse aller der Moduln, de Gruppen der Restklassen zu dieser isomorph sind. Das geometrische bilde, das einem dieser Moduln entspricht, ist also hier kein Punktsyst sondern enthält außerdem beliebige algebraische Kurven, Flächen usw. n-dimensionalen Raum.

---

[1]) Die nachfolgende Abhandlung hat, von unwesentlichen Änderungen a sehen, bei der Philosophischen Fakultät der Universität Göttingen als Habilitati schrift gedient. (Eingereicht September 1918.)

[2]) Über homogene kommutative Gruppen hyperkomplexer Größen und ihre legung in unzerlegbare Faktoren. Göttingen 1917, im folgenden zitiert mit Diss.

Die Untersuchung glaubt daher nach zweierlei Richtungen hin ein nteresse zu besitzen. Einmal liefert sie einen Beitrag zur abstrakten heorie der allgemeinen sogenannten „Ringe", von denen ja die kommu-tiven Gruppen hyperkomplexer Größen spezielle Fälle sind[3]). Zweitens ezweckt sie, als eine Fortsetzung meiner Arbeit *Über Moduln und Grup-en hyperkomplexer Größen* [Mathematische Zeitschrift, Bd. II (1918), 29—42, im folgenden zitiert mit M.], die Theorie der Moduln und da-it der allgemeinen algebraischen Gebilde von einem neuen Gesichts-nkte aus zu untersuchen. Das Hauptziel ist dabei die Aufweisung von öglichst einfachen Bestandteilen der betrachteten Modulklassen und der achweis der Eindeutigkeit der Zerspaltung einer beliebigen Klasse in ese Bestandteile. Zwei Prozesse dienen diesem Zwecke, ein *additiver*, die *eduktion*, und ein *multiplikativer*, die *Zerlegung* der Klassen. Für die eduktion ist das Ziel in der genannten Arbeit erreicht worden; hier ndelt es sich um die Zerlegung.

Ich beschränke mich dabei also auf irreduzible Klassen bzw. Grup-en[4]), geometrisch gesprochen auf Gebilde, die nicht in zwei völlig ge-ennte algebraische Gebilde zerfallen (vgl. M., S. 39); es sind dabei also ispielsweise zwei Kurven, die mindestens einen Punkt gemeinsam haben, gelassen[5]). Vor allem aber ist keinerlei Beschränkung bezüglich der Vielfachheit" des Gebildes getroffen; im Gegenteil hoffe ich, gerade für esen Begriff in der Gruppe selbst ein klar und scharf faßbares algebra-hes Äquivalent zu bieten. So behandelt denn auch die Arbeit vorwiegend ne Restklassen, die den Flächen entsprechen, die das ganze Gebilde ent-lten, ohne zum Modul zu gehören[6]), und in deren Eigenschaften sich e Vielfachheit des Gebildes ausdrückt. Es zeigt sich dabei, daß die

---

[3]) Die Arbeit läuft in dieser Beziehung parallel mit der des Herrn Fraenkel, er die Teiler der Null und die Zerlegung von Ringen (Journal für die reine und gewandte Mathematik Bd. 145 (1915), S. 139—176), benutzt aber andere Methoden d Begriffe; die Sätze des Herrn Fraenkel beziehen sich auf solche Ringe, für die ne Bedingung Z (a. a. O., S. 152) erfüllt ist, während diese Bedingung bei mir der benutzt wird, noch auch allgemein gilt.

[4]) Vgl. auch Diss. S. 54—55.

[5]) In der Literatur sind diese Gebilde für die Ebene und den Raum von Herrn ether (Über die reduktiblen algebraischen Kurven [Acta Mathematica Bd. VIII 86), S. 161—192]) genau untersucht worden; es zeigt sich dabei, daß sie wichtige genschaften mit den irreduziblen gemein haben. Auch die Geraden- und Ebenen-steme, die in der Dissertation des Herrn Prüß, Über vollständig zerfallende al-braische Raumkurven und Flächen (Kiel 1918) untersucht werden, erzeugen irre-zible Gruppen.

[6]) Es sind dies nicht die „Teiler der Null" des Herrn Fraenkel (a. a. O. S. 144, finition I), sondern es muß sogar eine Potenz der betreffenden Größe verschwinden.

grundlegenden Begriffe und Sätze vom Fall des Punktes sich glatt a den allgemeinen Fall übertragen lassen.

Der Zerlegungssatz wird nun u. a. für den Fall derjenigen homogen Gruppen bzw. Modulklassen ausgesprochen, deren Moduln höchstens Punk und Kurven, aber keine Flächen oder höherdimensionale Gebilde da stellen[7]). Erst im letzten Paragraphen wird von diesen Beschränkung Gebrauch gemacht. Die Definition der homogenen Gruppen entspric dabei völlig der alten Definition (Diss., S. 44—45) und enthält diese sich. An den zugehörigen Moduln ist aber diese Eigenschaft nicht me ohne weiteres zu erkennen; es ist eben eine Eigenschaft der Grupp durch die im Gegenteil umgekehrt die Moduln charakterisiert und a der Menge aller Moduln herausgehoben werden. Nur für die Grupp wird übrigens der Zerlegungssatz formuliert; für die zugehörigen Klass ergibt er sich dann auf Grund einiger einfacher Bemerkungen (vgl. c Paradigma P., S. 74) mittels der Sätze der Arbeit von selbst.

Die Anlage des Ganzen schließt sich im Gedankengang eng an d Dissertation an. Im einzelnen will ich nur bemerken, daß der neue B griff der primitiven Systeme im Spezialfalle der endlichen Ordnung a den alten Begriff hinausläuft; das zeigt Satz 18 der Arbeit und Hil satz II der Dissertation. Ferner sei darauf hingewiesen, daß alle Begri und Sätze der Arbeit, abgesehen von denen, in denen die Mannigfalt keit des Gebildes vorkommt, nur in einer Hinsicht Gebrauch dav machen, daß es sich um Moduln von *endlich* vielen Variablen hand nämlich in folgender: Es gibt ein festes r, so dass das Produkt von r Funktionen, die in allen Nullstellen des Moduls verschwinden, der N kongruent ist[8]). Daher lassen sich viele Sätze auch für diejenigen M duln von abzählbar unendlich vielen Variablen (bei denen jede Fun tion nur von endlich vielen darunter abhängt) aussprechen, die selbst au diese Eigenschaft haben.

An Hilfsmitteln benutzt die Arbeit außer dem genannten Hilbe schen Satze nur einige Grundbegriffe der Eliminationstheorie und allem einige einfache Hilfssätze über zeilenfinite Linearformen von une lich vielen Variablen, die im § 1 zusammengestellt sind.

Um die Stellung der Zerlegung der Modulklassen zu der Laskersch Zerlegung eines Moduls in primäre Moduln[9]) zu charakterisieren, beme ich, daß die Zerlegung der Modulklassen in manchen Fällen weiterfü

---

[7]) Vgl. auch die wesentlich allgemeineren Sätze 43 und 44.

[8]) Vgl. Hilbert, Über die vollen Invariantensysteme [Mathematische Anna Bd. XLII (1893), S. 313—373], S. 320—321.

[9]) E. Lasker, Zur Theorie der Moduln und Ideale [Math. Annalen Bd. (1905), S. 20—116].

z. B. sind sogar gewisse Klassen von Primmoduln noch zerlegbar, so die lasse des Moduls 0 im Bereiche der Variablen x_1, x_2 in die beiden lassen der Moduln 0 im Bereiche der Variablen x_1 bzw. x_2) in anderen ällen früher Halt macht; z. B. ist die Gruppe des Moduls $(x_1\, x_2)$ im ereiche der Variablen x_1, x_2 irreduzibel und unzerlegbar.

Zum Schluß möchte ich dankbar der wertvollen Anregungen gedenken, ie ich für die Ausdehnung meiner Untersuchungen von den endlichen auf ie unendlichen Gruppen schon vor Jahren in Gesprächen durch Herrn rof. O. Toeplitz empfing, der dabei auch bereits den Zusammenhang it der Modultheorie im Auge hatte.

Der im folgenden zugrunde gelegte Koeffizientenbereich ist der Beeich aller komplexen Zahlen.

§ 1.

Hilfssätze über lineare Formen.

Es seien

1) $$\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots$$

gendwelche abzählbar unendlich viele „Größen", zwischen denen die ddition, Subtraktion und die Multiplikation mit einer beliebigen komexen Zahl definiert ist. Diese Operationen sollen den gewöhnlichen egeln der additiven Algebra genügen, nämlich dem assoziativen, komutativen und distributiven Gesetz, sowie dem Gesetz der eindeutigen mkehrbarkeit der Addition. Es wird daher für die Hilfssätze dieses aragraphen — nicht für die späteren Anwendungen — genügen, sich runter einfach Unbestimmte zu denken.

Wir betrachten nun lineare Formen der Größen (1) mit gewöhnlichen mplexen Koeffizienten, von denen aber stets *nur endlich viele* von Null rschieden sein sollen. Die Größen (1) seien ferner linear unabhängig dem Sinne, daß keine lineare Beziehung mit höchstens endlich vielen n Null verschiedenen Koeffizienten

$$\sum_i a_i \mathfrak{e}_i = 0$$

stehen kann, ohne daß *alle* $a_i = 0$ sind. Wir treffen ein für allemal e folgende Verabredung: Wo immer in der Arbeit von linearen Verdungen, linearen Abhängigkeiten usw. von abzählbar vielen Größen (1) e Rede ist, sollen dabei stets nur endlich viele von Null verschiedene oeffizienten vorkommen, ohne daß das jedesmal besonders hervorgehoben rd.

Wir betrachten ein System von linear unabhängigen Linearformen n Sinne der getroffenen Verabredung)

$$\mathfrak{f}_i = \sum_k a_{ik} \mathfrak{e}_k ; \tag{2}$$

ein solches System soll *vollständig* heißen, wenn die Matrix von unendli vielen Zeilen und Kolonnen

$$A = (a_{ik}) \tag{3}$$

abgeschlossen ist, d. h. wenn eine eindeutige, alsdann ebenfalls zeilenfin Reziproke[10])

$$A^{-1} = (A_{kl})$$

existiert, so daß

$$A A^{-1} = A^{-1} A = E \tag{4}$$

die unendliche Einheitsmatrix ist. Es gilt nun

Hilfsatz I. *Jede Linearform von* $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots$ *kann als lineare V bindung der Linearformen des vollständigen Systems* (2) *dargestellt werd Umgekehrt ist jedes System linear unabhängiger Linearformen, durch d jede Linearform dargestellt werden kann, ein vollständiges.*

Aus (4) ergibt sich nämlich erstens

$$\mathfrak{e}_i = \sum_{k,e} A_{ik} a_{kl} \mathfrak{e}_l = \sum_k A_{ik} \mathfrak{f}_k , \tag{5}$$

womit der erste Teil des Satzes bewiesen ist. Gilt umgekehrt für jed $\mathfrak{e}_i$ eine Darstellung (5) durch das System (2), so ergibt sich, wenn zeilenfinite Matrix $(A_{ik}) = X$ gesetzt wird,

$$XA = E .$$

Hieraus folgt $A(XA - E) = 0$, oder, weil bei zeilenfiniten Matrizen assoziative Gesetz der Multiplikation gilt,

$$(AX - E)A = 0 .$$

Ist nun das System (2) linear unabhängig, so folgt hieraus

$$AX - E = 0 ,$$

und X ist die eindeutig bestimmte vordere und hintere Reziproke[11]).

Hilfssatz II. *Jedes System von linear unabhängigen Linearform kann durch Hinzufügung von endlich oder unendlich vielen Grö* $\mathfrak{e}_{\nu_1}, \mathfrak{e}_{\nu_2}, \ldots$ *zu einem vollständigen System ergänzt werden.*

---

[10]) Vgl. Toeplitz, Über die Auflösung unendlich vieler linearer Gleichun mit unendlich vielen Unbekannten. [Rendiconti del Circolo Matematico di Palen Bd. XXVIII (1909), S. 88–96], S. 91–92.

[11]) Vgl. Hellinger-Toeplitz, Grundlagen für eine Theorie der unendlic Matrizen [Mathematische Annalen Bd. LXIX (1910), S. 289–330], S. 312.

Das System (2) sei jetzt linear unabhängig, aber nicht vollständig. ann genügt es nach Hilfssatz I, gewisse Größen $e_{\nu_1}, e_{\nu_2}, \ldots$ zu finden, e zusammen mit dem System (2) ein linear unabhängiges System bilden, ırch das jede Größe (1) ausgedrückt werden kann.

Es sei e_{ν_1} die erste nicht durch die Größen (2) linear ausdrückbare ıter den Größen (1). Fügen wir e_{ν_1} zum System (2) hinzu, so erhalten ir ein System von linear unabhängigen Linearformen, durch die $e_1, \ldots, e_{\nu_1}$ ısdrückbar sind. Ist nun e_{ν_2} die nächste nicht durch das so erweiterte ystem ausdrückbare unter den Größen (1), falls eine solche überhaupt ɔch vorhanden ist, falls also das erweiterte System noch nicht vollständig t, so fügen wir e_{ν_2} dem System hinzu und erhalten so ein System von ıear unabhängigen Linearformen, durch die die Größen $e_1, \ldots, e_{\nu_2}$ aus- rückbar sind. Wird dies Verfahren genügend weit fortgesetzt, so erhält ıan das vollständige System des Hilfssatzes II.

Hilfssatz III. *Aus jedem abzählbaren System von Linearformen* ɔn $e_1, e_2, \ldots$, *durch das jede Größe* $e_1, e_2, \ldots$ *ausdrückbar ist, läßt sich n vollständiges System linear unabhängiger Linearformen auswählen.*

Das System (2) habe die Eigenschaften der Voraussetzung. Es sei ɪrner f_{n_1} $(n_1 > 1)$ die erste Linearform, die als lineare Verbindung von $, \ldots, f_{n_1-1}$ darstellbar ist. Dann streichen wir f_{n_1}; durch die übrig- leibenden Formen ist alsdann jede Form ausdrückbar, und die ersten $_1 - 1$ Formen des reduzierten Systems sind linear unabhängig. Es sei ann f_{n_2} $(n_2 > n_1)$ die erste Linearform des reduzierten Systems, die sich ırch die vorhergehenden ausdrücken läßt, wenn noch eine solche vor- anden ist. Wir streichen f_{n_2}; durch die übrigbleibenden Formen ist als- ann jede Form ausdrückbar, und die ersten $n_2 - 1$ Formen sind linear ıabhängig. Wird das Verfahren genügend weit fortgesetzt. so erhält an das vollständige System des Hilfssatzes III.

Hilfssatz IV. *In einem vollständigen System linear unabhängiger inearformen von* $e_1, e_2, e_3, \ldots$ *gibt es solche Linearformen, deren von* $, e_3, \ldots, e_{2i-1}, \ldots$ *abhängende Bestandteile ein vollständiges System near unabhängiger Linearformen der Größen* $e_1, e_3, \ldots, e_{2i-1}, \ldots$ *bilden.*

Nach Hilfssatz I kann jede Größe $e_1, e_3, \ldots$ durch die Formen (2) nes vollständigen Systems dargestellt werden. Sei etwa

$$e_{2j-1} = \sum_k c_{2j-1,k} f_k.$$

tzen wir nun

$$f_k = g_k + h_k,$$

obei

$$g_k = \sum_i a_{k,2i-1} e_{2i-1}$$

)

$$\mathfrak{h}_k = \sum_i a_{k,2i}\, \mathfrak{e}_{2i}$$

ist, so wird

$$\mathfrak{e}_{2j-1} = \sum_k c_{2j-1,k}\, \mathfrak{g}_k + \sum_k c_{2j-1,k}\, \mathfrak{h}_k.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Größen (1) mit ungeraden u geraden Indizes folgt hieraus

$$\mathfrak{e}_{2j-1} = \sum_k c_{2j-1,k}\, \mathfrak{g}_k,$$

so daß sich also jede Größe $\mathfrak{e}_{2j-1}$ durch die Linearformen (6) ausdrück läßt. Es gibt daher unter diesen Linearformen nach Hilfssatz III vollständiges System linear unabhängiger Linearformen, womit der Sa bewiesen ist. Selbstverständlich gilt der Satz auch, wenn nicht a ungeraden Indizes, sondern nur *endlich* viele darunter ausgezeichnet werd

Hilfssatz V. *Es sei M irgendeine Teilmenge von der Menge al Linearformen der Größen* (1)[12]. *Dann gibt es in M ein System v höchstens abzählbar unendlich vielen Linearformen, die linear unabhäng sind, und durch die jede Form in M linear dargestellt werden kann.*

Für jedes ganze $n \geqq 1$ sei M_n die Teilmenge von M, die aus c Formen besteht, die nur von den Größen $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ abhängen. In gibt es eine Anzahl $r_n \leqq n$ von linear unabhängigen Formen, durch sich jede Form von M_n linear darstellen läßt. Weil M_n eine Teilmen von M_{n+1} ist, lassen sich r_{n+1} linear unabhängige Formen aus M_{n+1} wählen, daß die $r_n (\leqq r_{n+1})$ Formen von M_n darunter enthalten si während zugleich jede Form von M_{n+1} durch die r_{n+1} Formen darstell ist. Es läßt sich also das System der r_n Formen von M_n zu einem e sprechenden System von r_{n+1} Formen von M_{n+1} ergänzen, und dies gilt $n = 1, 2, 3, \ldots$ Da nun jede Form aus M einer Teilmenge M_n angeh so ist durch die so gewonnenen höchstens abzählbar vielen Formen j Form aus M linear darstellbar.

§ 2.

Allgemeine Eigenschaften der Gruppe der Restklassen mod $\mathfrak{M}$

Es sei

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(x_1, \ldots, x_m) \tag{1}$$

ein von Eins verschiedener Modul im Bereiche der Variablen $x_1, \ldots,$ mit beliebigen komplexen Koeffizienten. Es sei $\mathfrak{A}$ die Gruppe der Re

[12]) Es sei ausdrücklich bemerkt, daß die Menge M keine „lineare Schar" sein braucht, d. h. daß nicht mit je endlich vielen zu M gehörenden Linearform auch jede lineare Verbindung zu M gehören muß.

lassen mod $\mathfrak{M}$. Diese enthält (vgl. M., § 2) endlich oder abzählbar unıdlich viele linear unabhängige Größen, als deren lineare Verbindung de Größe der Gruppe darstellbar ist, und die wir als eine Basis der ruppe bezeichnen. Die Anzahl der Basiselemente ist eine Invariante der ruppe und wird als ihre *Ordnung* bezeichnet. Die Gruppe enthält ferner n Einheitselement, nämlich die Restklasse der Funktion 1, die wir selbst it 1 bezeichnen.

Satz 1. *Die Gruppe $\mathfrak{A}$ der Restklassen* mod $\mathfrak{M}$ *ist dann und nur ınn von endlicher Ordnung, wenn das durch $\mathfrak{M}$ definierte algebraische ebilde aus lauter einzelnen Punkten besteht.*

Der Satz ist seit Kronecker bekannt; zum Beweise betrachte man wa zuerst den Fall eines primären Punktmoduls, bei dem man sich icht überzeugt, daß ihm eine endliche irreduzible Gruppe entspricht gl. z. B. P., Satz I); der allgemeine Fall erledigt sich dann auf Grund s Satzes, daß dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen mehrerer Moduln e „Summe" der entsprechenden Gruppen der Restklassen entspricht, er also eine endliche Gruppe. Umgekehrt ist jede endliche Gruppe in dlich viele irreduzible endliche Bestandteile reduzibel, also jeder zuehörige Modul kleinstes gemeinsames Vielfache von endlich vielen priären Punktmoduln; sein Gebilde besteht demgemäß aus endlich vielen nzelnen Punkten.

Jeder Modul, dessen Gebilde eine „Mannigfaltigkeit" $\geqq 1$ besitzt[13]), stimmt daher eine Gruppe der Restklassen von *unendlicher* Ordnung.

Wir werden uns nun in der vorliegenden Arbeit auf den Fall beschränken, daß die Gruppe $\mathfrak{A}$ *irreduzibel* ist, m. a. W.: es gebe nicht zwei ntergruppen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ in $\mathfrak{A}$, so daß jede Größe ξ von $\mathfrak{A}$ eindeutig in r Form $\xi = \eta + \zeta$ dargestellt werden kann, wobei η zu $\mathfrak{A}_1$, ζ zu $\mathfrak{A}_2$ hört, und wobei das Produkt jeder Größe von $\mathfrak{A}_1$ mit jeder Größe von verschwindet. Nach M., Satz III ist dazu notwendig und hinreichend, ß $\mathfrak{M}$ nicht als kleinstes gemeinsames Vielfache zweier teilerfremder oduln darstellbar ist, sein Gebilde also nicht in zwei oder mehrere vollndig getrennt liegende Gebilde zerfällt. Beispiele für irreduzible Gruppen lden die Gruppen der Restklassen eines Primmoduls oder eines primären oduls; aber auch z. B. für $\mathfrak{M} = (x_1 x_2)$ ist $\mathfrak{A}$ irreduzibel, da die beiden ebilde $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ den Nullpunkt gemein haben.

Wir erinnern nun an die Definition I in P., nach der zwei Moduln, ren Gruppen der Restklassen zueinander isomorph sind, in dieselbe lasse gerechnet werden sollen.

[13]) Vgl. zur Definition der Mannigfaltigkeit etwa Macaulay, On the Resolution a given Modular System into Primary Systems including some Properties of lbert Numbers [Mathematische Annalen Bd. LXXIV (1913), S. 66—121], S. 73.

Satz 2. *Zwei Moduln derselben Klasse sind birational verwandt; die Mannigfaltigkeit des Gebildes eines Moduls ist daher eine Invariante der Klasse.*

Es sei

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(y_1, \ldots, y_n) \tag{4}$$

ein zu (1) äquivalenter Modul, dessen Gruppe $\mathfrak{B}$ der Restklassen also z $\mathfrak{A}$ isomorph ist. Dann ist einerseits

$$\mathfrak{y}_j = f_j(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m) \qquad (j = 1, \ldots, n \tag{5}$$

andererseits

$$\mathfrak{x}_i = g_i(\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n) \qquad (i = 1, \ldots, m \tag{6}$$

wobei $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m$ die Restklassen von $x_1, \ldots, x_m$ bedeuten, $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n$ d den Restklassen von $y_1, \ldots, y_n$ in $\mathfrak{B}$ vermöge der Isomorphie zugeordnet Größen von $\mathfrak{A}$. Bildet man nun den Modul aller Relationen zwisch den Größen $\mathfrak{y}_j$ in $\mathfrak{A}$, so erhält man genau den Modul $\mathfrak{N}$, geschrieben den Größen $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n$. Setzt man also für $y_1, \ldots, y_n$ die Funktion $f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m)$ in $\mathfrak{N}$ ein, so verschwinden die er stehenden Funktionen mod $\mathfrak{M}$. Entsprechendes gilt, wenn man für $x_1, \ldots,$ die Funktionen $g_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, g_m(y_1, \ldots, y_n)$ in $\mathfrak{M}$ einsetzt, mod Daher sind beide Moduln birational verwandt vermöge *ganzer* Funktione Ist nun $\mathfrak{P}(x_1, \ldots, x_m)$ ein in $\mathfrak{M}(x_1, \ldots, x_m)$ enthaltener Primmodul v der Mannigfaltigkeit d (einen solchen gibt es offenbar, wenn d die Mann faltigkeit von $\mathfrak{M}$ ist), setzt man ferner in Übereinstimmung mit (5)

$$y_j = f_j(x_1, \ldots, x_m) \qquad (j = 1, \ldots, \tag{7}$$

und schränkt die Variablen $x_1, \ldots, x_m$ auf das durch den Modul $\mathfrak{P}$ finierte Gebilde ein, d. h. setzt man $\mathfrak{P}(x_1, \ldots, x_m) = 0$, so wird Gebiet der Variablen $y_1, \ldots, y_n$ eingeschränkt auf gewisse Nullstellen Moduls $\mathfrak{N}$; d. h. es gilt $\mathfrak{N}(y_1, \ldots, y_n) = 0$. Andererseits wird nach identisch in $x_1, \ldots, x_m$

$$x_i \equiv g_i(y_1, \ldots, y_n)\,(\mathfrak{M}) \qquad (i = 1, \ldots, n$$

also a fortiori

$$x_i \equiv g_i(y_1, \ldots, y_n)\,(\mathfrak{P}). \tag{8}$$

Die Formeln (7) und (8) zeigen unmittelbar, daß, wenn d der V riablen $x_1, \ldots, x_m$ als algebraisch unabhängig, die übrigen als algebrais Funktionen derselben aufgefaßt werden, unter den $y_1, \ldots, y_n$ nach höchstens, nach (8) genau d algebraisch unabhängige vorhanden sind; besagt, daß auch das durch $\mathfrak{N}(y_1, \ldots y_n)$ definierte Gebilde eine d-fa Mannigfaltigkeit enthält, selbst also von der Mannigfaltigkeit $\geqq d$

Durch Umkehrung der ganzen Schlußweise findet man, daß die Mannigaltigkeit $\leqq d$, also $= d$ ist.

Definition I. *Es sei* $F(x_1, \ldots, x_m)$ *eine Funktion, die für alle Nullstellen des Moduls* (1) *verschwindet. Dann heißt die Größe* $\xi = F(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m)$ *eine Wurzelgröße der Gruppe.*

Daß diese Definition eine invariante, d. h. von dem speziellen Modul $\mathfrak{M}$ unabhängige Eigenschaft der Größe ξ von $\mathfrak{A}$ charakterisiert, zeigt

Satz 3. *Eine Größe* ξ *der Gruppe* $\mathfrak{A}$ *ist dann und nur dann eine Wurzelgröße, wenn eine Potenz von ihr verschwindet:*

$$\xi^r = 0 \qquad (r \geqq 1). \tag{9}$$

Sei in der Tat $\xi = F(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m)$ eine Wurzelgröße. Dann ist nach einem bekannten Satze von Hilbert[14]) für ein bestimmtes festes r, das sogar von F unabhängig ist,

$$F^r \equiv 0 \ (\mathfrak{M}),$$

also gilt (9). Besteht umgekehrt für $\xi = F(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m)$ die Gleichung (9), so ist

$$F^r \equiv 0 \ (\mathfrak{M}),$$

und hieraus folgt, daß die Funktion $F(x_1, \ldots, x_m)$ für alle Nullstellen von $\mathfrak{M}$ verschwindet. — Insbesondere ist die Größe Null selbst stets eine Wurzelgröße.

Satz 4. *Die Summe zweier Wurzelgrößen und das Produkt einer beliebigen Größe mit einer Wurzelgröße ist wieder eine Wurzelgröße.*

Folgt aus Definition I. — Die Gesamtheit aller Wurzelgrößen, die wir im folgenden mit $\mathfrak{A}_1$ bezeichnen werden, erfüllt also die eine Bedingung der Definition der Gruppen hyperkomplexer Größen, ist aber selbst keine Gruppe, da sie die Haupteinheit nicht enthält. In der Tat müßte für diese die Gleichung

$$\xi^2 = \xi \tag{10}$$

bestehen; ist aber $\xi \neq 0$, und $r \geqq 2$ der niedrigste Exponent, für den (9) gilt, so folgt aus (10), daß schon $\xi^{r-1} = 0$ sein müßte, was unmöglich ist.

Es gibt Fälle, in denen als Wurzelgröße nur die Größe Null auftritt; wir erhalten sie, wenn wir von einem Modul ausgehen, für den die obige Hilbertsche Zahl $r = 1$ gewählt werden kann. Dies tritt z. B. für jeden Primmodul ein, da jede Funktion, die das ganze Gebilde des Primmoduls enthält, auch durch diesen teilbar ist. Aber z. B. auch für den oben schon

[14]) a. a. O.

erwähnten Modul $(x_1 x_2)$ ist $r = 1$; denn jede Funktion, die für $x_1 =$ und für $x_2 = 0$ verschwindet, ist durch $x_1 x_2$ teilbar.

Definition II. *Eine Gruppe heißt eine Stammgruppe, wenn* außer der Größe Null keine Wurzelgröße besitzt.

Satz 5. *Fügt man zu dem Modul* (1) *alle Funktionen hinzu, d* in allen Nullstellen von (1) *verschwinden, so erhält man einen neu* Modul und als Gruppe der Restklassen des neuen Moduls eine Unte gruppe von $\mathfrak{A}$, die eine Stammgruppe ist. Die verschiedenen so en stehenden Stammgruppen von $\mathfrak{A}$, die den verschiedenen zu (1) äqu valenten Moduln entsprechen, sind sämtlich zueinander isomorph.

Der erste Teil des Satzes ist nach Satz 4 klar. Um den zweiten beweisen, sei (4) ein zu (1) äquivalenter Modul; die durch Hinzufügu aller Funktionen von $x_1, \ldots, x_m$ bzw. $y_1, \ldots, y_n$, die in allen Nullstell von (1) bzw. (4) verschwinden, erzeugte Stammgruppe sei $\mathfrak{A}_0$ bzw. $\mathfrak{B}$ Es sei ferner $\mathfrak{x}_0', \mathfrak{x}_0'', \ldots$ eine Basis von $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{y}_0', \mathfrak{y}_0'', \ldots$ eine Basis von $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{x}_1', \mathfrak{x}_1'', \ldots$ ein System von endlich oder abzählbar unendlich vielen line unabhängigen Wurzelgrößen, durch die jede Wurzelgröße linear dargeste werden kann. Dann bilden sowohl die Größen

$$\mathfrak{x}_0', \mathfrak{x}_0'', \ldots, \mathfrak{x}_1', \mathfrak{x}_1'', \ldots \tag{11}$$

als auch die Größen

$$\mathfrak{y}_0', \mathfrak{y}_0'', \ldots, \mathfrak{x}_1', \mathfrak{x}_1'', \ldots \tag{12}$$

eine Basis von $\mathfrak{A}$. Denn erstens sind die Größen (11) linear una hängig; aus

$$\sum_i a_i \mathfrak{x}_0^{(i)} = \sum_j b_j \mathfrak{x}_1^{(j)} \tag{13}$$

folgt nämlich, weil die Größe linker Hand zu $\mathfrak{A}_0$ gehört, die Größe recht Hand eine Wurzelgröße ist,

$$\sum_i a_i \mathfrak{x}_0^{(i)} = 0,$$

und hieraus $a_i = 0$; aus (13) folgt alsdann $b_j = 0$. Andererseits folgt a der Definition der Gruppe $\mathfrak{A}_0$, daß jede Größe von $\mathfrak{A}$ durch die Größen (1 linear dargestellt werden kann. Entsprechend beweist man die Behauptu für die Größen (12).

Insbesondere kann also $\mathfrak{y}_0^{(i)}$ in der Form

$$\mathfrak{y}_0^{(i)} = \sum_k a_{ik} \mathfrak{x}_0^{(k)} + \sum_l b_{il} \mathfrak{x}_1^{(l)}$$

dargestellt werden. Setzen wir

14)
$$\sum_l a_{ik}\,\mathfrak{x}_0^{(k)} = \bar{\mathfrak{x}}_0^{(i)},$$

) wird

15)
$$\mathfrak{y}_0^{(i)} = \bar{\mathfrak{x}}_0^{(i)} + \sum_e b_{il}\,\mathfrak{x}_1^{(l)}.$$

ieraus ergibt sich, wenn wir jeder Größe $\sum c_i\,\mathfrak{y}_0^{(i)}$ von $\mathfrak{B}_0$ die in dem us (15) sich ergebenden Ausdrucke rechts vorkommende eindeutig be-immte Größe $\sum_i c_i\,\bar{\mathfrak{x}}_0^{(i)}$ von $\mathfrak{A}_0$ zuordnen, daß nach Satz 4 der Summe weier Größen von $\mathfrak{B}_0$ die Summe der zugeordneten Größen von $\mathfrak{A}_0$ ent-richt, desgleichen dem Produkte zweier Größen von $\mathfrak{B}_0$ das Produkt der geordneten Größen von $\mathfrak{A}_0$; in der Tat ist ja z. B. nach (15)

$$\mathfrak{y}_0^{(i)}\,\mathfrak{y}_0^{(j)} = \bar{\mathfrak{x}}_0^{(i)}\,\bar{\mathfrak{x}}_0^{(j)} + \bar{\mathfrak{x}}_0^{(i)} \sum_l b_{jl}\,\mathfrak{x}_1^{(l)} + \bar{\mathfrak{x}}_0^{(j)} \sum_l b_{il}\,\mathfrak{x}_1^{(l)} + \sum_l b_{il}\,\mathfrak{x}_1^{(l)} \sum_l b_{jl}\,\mathfrak{x}_1^{(l)},$$

nd alle rechtsstehenden Größen, abgesehen von dem ersten Gliede, sind ach Satz 4 Wurzelgrößen. Ferner ist bei dieser Zuordnung auch *jeder* röße von $\mathfrak{A}_0$ eine Größe von $\mathfrak{B}_0$ zugeordnet; dies wird bewiesen sein, enn gezeigt ist, daß die Größen (14) eine Basis von $\mathfrak{A}_0$ bilden. Sei nun irgendeine Größe von $\mathfrak{A}$, so ist, weil die Größen (12) eine Basis von $\mathfrak{A}$ lden,

$$\mathfrak{x} = \sum_i c_i\,\mathfrak{y}_0^{(i)} + \sum_k d_k\,\mathfrak{x}_1^{(k)},$$

er nach (15)

$$\mathfrak{x} = \sum_i c_i\,\bar{\mathfrak{x}}_0^{(i)} + \sum_k f_k\,\mathfrak{x}_1^{(k)}.$$

ndererseits ist aber, wenn $\mathfrak{x}$ zu $\mathfrak{A}_0$ gehört,

16)
$$\mathfrak{x} = \sum_k b_k\,\mathfrak{x}_0^{(k)};$$

so folgt

$$\sum_k b_k\,\mathfrak{x}_0^{(k)} - \sum_i c_i\,\bar{\mathfrak{x}}_0^{(i)} = \sum_k f_k\,\mathfrak{x}_1^{(k)}.$$

e rechtsstehende Größe ist aber eine Wurzelgröße, die nach ihrem Aus-ucke linker Hand zur Gruppe $\mathfrak{A}_0$ gehört; also ist es die Größe Null. ir haben daher wegen (16)

$$\mathfrak{x} = \sum_i c_i\,\bar{\mathfrak{x}}_0^{(i)},$$

daß jede Größe von $\mathfrak{A}_0$ durch $\bar{\mathfrak{x}}_0^{(i)}$ darstellbar ist. Andererseits sind ese Größen linear unabhängig; wäre nämlich

$$\sum_i a_i\,\bar{\mathfrak{x}}_0^{(i)} = 0,$$

so wäre nach (15)

$$\sum_i a_i \mathfrak{y}_0^{(i)} = \sum_{i,e} a_i b_{il} \mathfrak{x}_1^{(l)},$$

also eine Wurzelgröße; hieraus folgt

$$\sum_i a_i \mathfrak{y}_0^{(i)} = 0,$$

und daraus $a_i = 0$.

Satz 6. *Die Stammgruppen einer Gruppe $\mathfrak{A}$ sind dann und n dann von endlicher Ordnung, und alsdann sämtlich von der Ordnung wenn die Gruppe $\mathfrak{A}$ von endlicher Ordnung ist.*

Der Satz folgt direkt aus Satz 1, da das Gebilde des Moduls (und das des erweiterten Moduls, dessen Gruppe der Restklassen die b trachtete Stammgruppe ist, übereinstimmen. Im Falle endlicher Ordnu besteht jede Stammgruppe, da unsere Gruppe $\mathfrak{A}$ als irreduzibel voraus gesetzt wurde, aus den Vielfachen der Haupteinheit.

Während also eine Stammgruppe bei unendlichen Gruppen stets selb unendliche Ordnung hat, gilt nicht Entsprechendes von den Wurzelgröße So erzeugt z. B. der Modul $\mathfrak{M}(x_1, x_2) = (x_1 x_2, x_2^2)$ die unendliche Stamm gruppe mit der Basis $1, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_1^2, \ldots$, dagegen bestehen die Wurzelgröß einzig und allein aus den Vielfachen der Größe $\mathfrak{x}_2$. Andererseits könn auch unendlich viele linear unabhängige Wurzelgrößen vorhanden se z. B. für $\mathfrak{M}(x_1, x_2) = (x_2^2)$, wo die Größen $\mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_1^2, \ldots$ sämtl linear unabhängige Wurzelgrößen sind.

Die Stammgruppen sind, wie man sieht, allein durch die geometrisch Gebilde der Moduln unserer Klasse bestimmt. In den Wurzelgrößen find die „Vielfachheit" ihren algebraischen Ausdruck. Auf die genauere Unt suchung der Gesamtheit der Wurzelgrößen wird es uns im folgenden sonders ankommen.

Wir suchen vor allem zu einer feineren Klassifizierung der Wurz größen zu gelangen und bedenken dazu, daß nach Satz 4 jedes Produ von zwei Wurzelgrößen wieder eine Wurzelgröße ist, desgleichen je lineare Verbindung von solchen Produkten. Alle Wurzelgrößen, die s als lineare Verbindung von Produkten zweier Wurzelgrößen darstel lassen, bezeichnen wir als Größen zweiter Stufe. Allgemeiner sprech wir folgende Definition aus:

Definition III. *Jede Wurzelgröße von $\mathfrak{A}$, die sich als linee Verbindung von Produkten von α Wurzelgrößen darstellen läßt, he eine Größe α-ter Stufe ($\alpha = 1, 2, \ldots$). Unter einer Größe nullter St verstehen wir ergänzend eine beliebige Größe der Gruppe.*

Eine beliebige Größe α-ter Stufe wird im folgenden häufig mit dem eichen $\{\alpha\}$ bezeichnet werden. Nach dem oben zitierten Satze von Hilbert bt es dann eine kleinste Zahl h, so daß alle Größen $(h+1)$-ter Stufe erschwinden, also nicht alle Größen h-ter Stufe.

Satz 7. *Die Summe zweier Größen α-ter Stufe und das Produkt ner beliebigen Größe der Gruppe mit einer Größe α-ter Stufe ist eine röße α-ter Stufe.*

Folgt aus Definition III und Satz 4.

Satz 8. *Es gibt Größen α-ter Stufe, die nicht von der $(\alpha+1)$-ten tufe sind* $(0 \leqq \alpha \leqq h)$.

Für $\alpha = 0$ folgt dies aus Satz 6, nach dem es in jedem Falle eine r Stammgruppe gehörige Größe in $\mathfrak{A}$ gibt; es sei also $\alpha > 0$. Wäre nn jede Größe α-ter Stufe eine Größe $(\alpha+1)$-ter Stufe, so betrachten ir ein von Null verschiedenes Produkt von h Wurzelgrößen. Da das eilprodukt der ersten α Faktoren von der $(\alpha+1)$-ten Stufe sein sollte, wäre das ganze Produkt gleich Null, weil ja jedes Produkt von $h+1$ urzelgrößen verschwindet, im Widerspruch zu unserer Annahme.

Definition IV. *Jede Größe α-ter Stufe, die nicht von der $(\alpha+1)$-ten tufe ist, heißt eine Größe α-ter Dimension* $(0 \leqq \alpha \leqq h)$. *Ein System n Größen α-ter Dimension, für die jede lineare Verbindung mit nicht mtlich verschwindenden Koeffizienten ebenfalls genau von der Dimension α t, heißt ein Hauptsystem α-ter Dimension.*

Z. B. bildet die Basis einer Stammgruppe von $\mathfrak{A}$ ein Hauptsystem llter Dimension.

Satz 9. *Ist $\mathfrak{x}_\alpha$ irgendeine Größe α-ter Dimension, so ist jede Größe $+\{\alpha+1\}$ ebenfalls von der Dimension α* $(0 \leqq \alpha \leqq h)$.

Nach Satz 7 ist diese Größe gewiß von der α-ten Stufe; wäre aber

$$\mathfrak{x}_\alpha + \{\alpha+1\} = \{\alpha+1\},$$

wäre nach Satz 7 auch

$$\mathfrak{x}_\alpha = \{\alpha+1\},$$

gen die Voraussetzung.

Wir betrachten jetzt für ein beliebiges α $(0 \leqq \alpha \leqq h)$ alle Größen ter Stufe, die wir uns durch eine beliebige Basis dargestellt denken. gibt dann nach Hilfssatz V ein System von höchstens abzählbar undlich vielen Größen darunter, die linear unabhängig sind, und durch die h jede Größe α-ter Stufe linear darstellen läßt. Insbesondere gilt dies o für alle Größen $(\alpha+1)$-ter Stufe; die hierbei auftretenden linearen rbindungen bilden indessen kein vollständiges System, da sonst nach lfssatz I *jede* Größe α-ter Stufe durch sie darstellbar, also von der

$(\alpha+1)$-ten Stufe wäre, was nach Satz 8 nicht der Fall ist. Betracht wir insbesondere ein vollständiges System linear unabhängiger Größ $(\alpha+1)$-ter Stufe, so können nach Hilfssatz II die zugehörigen linear Verbindungen durch gewisse Größen α-ter Stufe zu einem vollständig System ergänzt werden; es gibt also Größen von der α-ten Dimension, insgesamt ein Hauptsystem dieser Dimension bilden und die Eigensch haben, daß sich durch sie und die Größen $(\alpha+1)$-ter Stufe jede Grö α-ter Dimension linear darstellen läßt.

Definition V. *Ein Hauptsystem α-ter Dimension, durch das s jede Größe α-ter Dimension bis auf Größen $(\alpha+1)$-ter Stufe lin darstellen läßt, heißt ein vollständiges Hauptsystem α-ter Dimensi* $(0 \leqq \alpha \leqq h)$.

Beispielsweise bildet jede Basis einer Stammgruppe ein vollständig Hauptsystem nullter Dimension.

Satz 10. *Die Anzahl r_α der Größen eines vollen Hauptsyste α-ter Dimension, die endlich oder unendlich sein kann, ist eine I variante der Gruppe* $(0 \leqq \alpha \leqq h)$.

Falls die Anzahl der Größen $\mathfrak{x}'_\alpha, \mathfrak{x}''_\alpha, \ldots$ eines solchen Systems endl und $= r_\alpha$ ist, so gibt es kein Hauptsystem α-ter Dimension von $r_\alpha +$ Größen; denn wenn man jede der $r_\alpha + 1$ Größen durch $\mathfrak{x}'_\alpha, \mathfrak{x}''_\alpha, \ldots$ u Größen $(\alpha+1)$-ter Stufe darstellt, so gibt es gewiß eine lineare V bindung mit nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten, die von $(\alpha+1)$-ten Stufe ist. Es kann aber andererseits auch kein vollständig Hauptsystem α-ter Dimension von weniger als r_α Größen existieren; de mittels derselben Schlußweise würde sich ergeben, daß in diesem Fa das System $\mathfrak{x}'_\alpha, \mathfrak{x}''_\alpha, \ldots$ kein Hauptsystem bilden könnte.

Ist die Anzahl der Größen $\mathfrak{x}'_\alpha, \mathfrak{x}''_\alpha, \ldots$ unendlich, so kann kein Syst von endlich vielen Größen ein vollständiges Hauptsystem α-ter Dimens sein. Dann wäre nämlich jede der Größen $\mathfrak{x}'_\alpha, \mathfrak{x}''_\alpha, \ldots$ bis auf Grö $(\alpha+1)$-ter Stufe linear darstellbar durch endlich viele Größen, das Syst also gewiß kein Hauptsystem α-ter Dimension.

Satz 11. *Jede Größe α-ter Stufe ist eine lineare Verbindung Größen je eines vollen Hauptsystems der Dimensionen $\alpha, \ldots, h$. Größen je eines vollen Hauptsystems der Dimensionen $0, \ldots, h$ bil zusammen eine Basis der Gruppe.*

Nach der Definition V, angewandt auf $\alpha = h$, ist die erste Behaupt von Satz 11 für $\alpha = h$ richtig. Ist sie aber für die Stufen $\alpha+1, \ldots$ bereits bewiesen, so folgt sie auch für die Stufe α und gilt also allgem Andererseits sind die Größen der $h+1$ Hauptsysteme der Dimensio $0, \ldots, h$ nach ihrer Definition und nach Satz 7 voneinander linear unabhän

Definition VI. *Eine aus den Größen irgendwelcher vollen Hauptsysteme der Dimensionen* $0, \ldots, h$ *gebildete Basis heißt eine Hauptbasis der Gruppe* $\mathfrak{A}$.

Satz 12. *Aus einer Hauptbasis einer Gruppe* $\mathfrak{A}$ *erhält man wieder eine solche, indem man die Größen jedes einzelnen der die Basis bildenden vollen Hauptsysteme einer umkehrbaren linearen Transformation unterwirft und beliebige lineare Verbindungen der Größen der Hauptsysteme höherer Dimension hinzufügt. Umgekehrt erhält man auf diese Weise aus irgendeiner Hauptbasis der Gruppe* $\mathfrak{A}$ *jede andere.*

Es seien $\mathfrak{x}_\alpha', \mathfrak{x}_\alpha'', \ldots$ bzw. $\mathfrak{y}_\alpha', \mathfrak{y}_\alpha'', \ldots$ zwei vollständige Hauptsysteme α-ter Dimension $(0 \leqq \alpha \leqq h)$. Dann bestehen nach Satz 11 sowohl Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} \mathfrak{y}_\alpha' &= a_{11}\mathfrak{x}_\alpha' + a_{12}\mathfrak{x}_\alpha'' + \ldots + \{\alpha+1\} \\ \mathfrak{y}_\alpha'' &= a_{21}\mathfrak{x}_\alpha' + a_{22}\mathfrak{x}_\alpha'' + \ldots + \{\alpha+1\} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned} \tag{17}$$

als auch solche der Form

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_\alpha' &= A_{11}\mathfrak{y}_\alpha' + A_{12}\mathfrak{y}_\alpha'' + \ldots + \{\alpha+1\} \\ \mathfrak{x}_\alpha'' &= A_{21}\mathfrak{y}_\alpha' + A_{22}\mathfrak{y}_\alpha'' + \ldots + \{\alpha+1\} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned} \tag{18}$$

wobei die Matrix

$$(a_{ik}) = A, \qquad (A_{ik}) = B$$

gesetzt werde. Durch Einsetzen der Ausdrücke (18) in (17) oder umgekehrt erhält man, weil die Größen $\mathfrak{x}_\alpha', \mathfrak{x}_\alpha'', \ldots$ bzw. $\mathfrak{y}_\alpha', \mathfrak{y}_\alpha'', \ldots$ je ein volles Hauptsystem α-ter Dimension bilden,

$$AB = BA = E.$$

Daher ist die Matrix A abgeschlossen, und der zweite Teil des Satzes ist bewiesen. Wird andererseits A als abgeschlossen vorausgesetzt, während nur das System $\mathfrak{x}_\alpha', \mathfrak{x}_\alpha'', \ldots$ als vollständiges Hauptsystem α-ter Dimension angenommen wird, so kann nach Hilfssatz I jede Größe α-ter Dimension bis auf Größen $(\alpha+1)$-ter Stufe durch das System $\mathfrak{y}_\alpha', \mathfrak{y}_\alpha'', \ldots$ ausgedrückt werden, während keine lineare Verbindung dieser Größen von der $(\alpha+1)$-ten Stufe ist. Damit ist der Satz 12 vollständig bewiesen.

Insbesondere ergibt sich als

Folgerung: *Aus einem vollen Hauptsystem erster Dimension erhält man ein und jedes andere volle Hauptsgstem erster Dimension, indem man die Größen des ersten Systems einer umkehrbaren linearen Transformation unterwirft und beliebige Größen zweiter Stufe hinzufügt.*

Satz 13. *Die Dimension einer beliebigen Größe* $\mathfrak{x} \neq 0$ *der Gruppe* $\mathfrak{A}$ *gleich dem kleinsten Index* α, *für den bei einer Darstellung von* $\mathfrak{x}$

durch eine beliebige Hauptbasis $\mathfrak{x}'_\beta, \mathfrak{x}''_\beta, \ldots$ $(0 \leqq \beta \leqq h)$ *wenigstens ei der Größen* $\mathfrak{x}'_\alpha, \mathfrak{x}''_\alpha, \ldots$ *mit einem von Null verschiedenen Koeffizient auftritt.*

Zum Beweise dieses Satzes ist nur noch zu überlegen, daß der bestimmte Index von der speziellen Wahl der Hauptbasis unabhängig i das folgt aber direkt aus Satz 12. — Durch Satz 13 ist jeder von Nu verschiedenen Größe der Gruppe eine bestimmte Dimension zugewiese die Dimension der Größe Null bleibt unbestimmt.

Satz 14. *Es sei* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ *irgendein volles Hauptsystem erster Dime sion. Dann kann man jede Wurzelgröße als ganze rationale Funkti von je endlich vielen Größen* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ *darstellen, und zwar gibt es ei Hauptbasis von* $\mathfrak{A}$, *bei der für* $1 \leqq \alpha \leqq h$ *die Größen* α*-ter Dimensi Produkte* $\varepsilon_1^{\alpha_1} \varepsilon_2^{\alpha_2} \ldots$ *von genau* α *Faktoren* $(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots = \alpha)$ *sind.*

Der Satz ist bewiesen, wenn gezeigt werden kann, daß für $1 \leqq \alpha \leqq$ Produkte $\varepsilon_1^{\alpha_1} \varepsilon_2^{\alpha_2} \ldots (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots = \alpha)$ existieren, die ein volles Hau system der Dimension α bilden.

Wir beweisen dies zunächst für $\alpha = h$.

Jede Wurzelgröße ist nach Satz 11 von der Form

$$a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + \ldots + \{2\},$$

da die Größen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ ein volles Hauptsystem erster Dimension bild jedes Produkt von h Größen

$$(a_{11} \varepsilon_1 + a_{12} \varepsilon_2 + \ldots + \{2\}) \ldots (a_{h1} \varepsilon_1 + a_{h2} \varepsilon_2 + \ldots + \{2\}$$

beginnt also mit einer linearen Verbindung von Produkten der Fo $\varepsilon_1^{\alpha_1} \varepsilon_2^{\alpha_2} \ldots (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots = h)$, während alle übrigen Größen der Entwi lung der Klammern Größen $(h+1)$-ter Stufe, also gleich Null si Unter den sämtlichen Produkten $\varepsilon_1^{\alpha_1} \varepsilon_2^{\alpha_2} \ldots (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots = h)$, die als Linearformen irgendeines vollständigen Hauptsystems h-ter Dimens dargestellt denken können, gibt es nun nach Hilfssatz III ein vollst diges System linear unabhängiger Größen, da sich ja umgekehrt jede Grö dieses vollständigen Hauptsystems durch unsere Produkte linear darstel läßt. Diese ausgewählten Produkte bilden alsdann nach Definition V sel ein vollständiges Hauptsystem der Dimension h.

Sei jetzt bereits bewiesen, daß es für jedes $\beta > \alpha$ ein vollständi Hauptsystem der Dimension β gibt, das aus Produkten

$$\varepsilon_1^{\beta_1} \varepsilon_2^{\beta_2} \ldots (\beta_1 + \beta_2 + \ldots = \beta, \alpha < \beta \leqq h) \tag{19}$$

besteht. Dann betrachte ich irgendeine Größe α-ter Stufe. Diese eine Linearform von Produkten der Gestalt

$$(a_{11} \varepsilon_1 + a_{12} \varepsilon_2 + \ldots + \{2\}) \ldots (a_{a1} \varepsilon_1 + a_{a2} \varepsilon_2 + \ldots + \{2\}),$$

lso eine Linearform in

20) $$\varepsilon_1^{\alpha_1}\varepsilon_2^{\alpha_2}\ldots(\alpha_1+\alpha_2+\ldots=\alpha,\ \alpha+1,\ldots,h).$$

nter diesen Produkten gibt es nun ein vollständiges System linear un-
bhängiger Größen, durch das sich jede Größe α-ter Stufe linear darstellen
ßt. Um das zu zeigen, drücken wir alle Produkte (20) als Linearformen
urch je ein volles Hauptsystem $\alpha, (\alpha+1), \ldots, h$-ter Dimension aus und
enden alsdann Hilfssatz III an. Unter Weglassung der überflüssigen
rodukte mögen nun die Größen (20) selbst ein solches vollständiges
ystem linear unabhängiger Größen bilden. Dann stellen wir durch (20)
as System der Größen (19) linear dar und erhalten so ein System linear
nabhängiger Linearformen in (20), das nach Hilfssatz II zu einem voll-
ändigen System linear unabhängiger Linearformen ergänzt werden kann,
nd zwar durch Hinzufügung gewisser Größen (20) selbst. Diese hinzu-
ufügenden Größen enthalten genau α Faktoren $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, da ja jedes
rodukt von $\alpha+1$ und mehr Faktoren schon durch (19) linear ausdrück-
ar ist. Sie bilden ein vollständiges Hauptsystem α-ter Dimension und
atz 14 ist damit bewiesen. — Aus diesem Satze folgt, daß für eine
ruppe, die unendlich viele linear unabhängige Wurzelgrößen enthält,
ich $r_1 = \infty$ sein muß.

Wir fügen zum Schluß dieses Paragraphen noch einen Hilfssatz an,
r von den vorangehenden Entwicklungen unabhängig ist.

Hilfssatz VI. *In jeder Gruppe $\mathfrak{A}$ gibt es eine Basis der Form*
$=1, \xi'', \xi''', \ldots,$ *so daß für* $i>1, j>1$ *in*

$$\xi^{(i)}\xi^{(j)} = \sum_k a_{ijk}\xi^{(k)}$$

r Koeffizient $a_{ij1} = 0$ *ist.*

Ist $\mathfrak{A}$ die Gruppe der Restklassen eines Moduls (1), so ordnen wir alle
nktionen von (1) nach Potenzen von $(x_i - \xi_i)$ $(i=1,\ldots,m)$ um, wo-
i $\xi_1, \ldots, \xi_m$ irgendeine Nullstelle von $\mathfrak{M}$ ist. Dann hat jede Funktion
s Moduls in den neuen Variablen $(x_i - \xi_i)$ einen Untergrad $\geqq 1$. Stellen
r uns nun nach M., S. 7 ein System von Funktionen her, deren
stklassen eine Basis von $\mathfrak{A}$ bilden, so kann darunter die Funktion 1
t aufgenommen werden. Durch Subtraktion einer geeigneten Konstanten
n jeder anderen Funktion des Systems erhalten wir lauter Funktionen
es Untergrades $\geqq 1$, deren Produkte also vom Untergrad >1 sind.
n solches Produkt kann dann mod $\mathfrak{M}$ nur einer solchen linearen Ver-
dung unserer Basisfunktionen kongruent sein, in der die Funktion 1
ht vorkommt.

§ 3.

Die primitiven vollen Hauptsysteme erster Dimension.

Unter den vollen Hauptsystemen erster Dimension sollen nun i folgenden gewisse besondere Systeme aufgesucht werden, die wir als prin tive Systeme bezeichnen werden.

Es sei ε irgendeine Größe erster Dimension. Dann ist jede Potenz mindestens von der Dimension α. Ist aber

$$\varepsilon^{\alpha} = \{\alpha + 1\},$$

so ist

$$\varepsilon^{\alpha+1} = \{\alpha + 2\},$$

allgemein

$$\varepsilon^{\beta} = \{\beta + 1\} \text{ für } \beta > \alpha.$$

Es gibt also, da $\varepsilon^{h+1} = 0$ ist, eine höchste von Null verschied Potenz ε^{ϱ}, die genau von der Dimension ϱ ist. Die hierdurch bestimm positive ganze Zahl ϱ nennen wir den *Grad* von ε. Diese Definition, sich nur auf Größen erster Dimension bezieht, werde ergänzt, indem den Grad einer Größe zweiter Stufe gleich Null setzen.

Hilfssatz VII. *Ist ε eine Größe erster Dimension vom Grade so ist auch*

$$\varepsilon' = \varepsilon + \{2\}$$

vom Grade ϱ.

Wegen

$$\varepsilon'^{\alpha} = \varepsilon^{\alpha} + \{\alpha + 1\}$$

folgt dies aus Satz 9.

Es sei nun ϱ_1 die kleinste Zahl, die überhaupt als Grad einer Gr erster Dimension in unserer Gruppe vorkommt; dies ist eine Invaria der Gruppe. Wir betrachten die Menge aller Größen vom Grade ϱ_1.

Nach Hilfssatz VII gehört mit ε auch jede Größe $\varepsilon + \{2\}$ zu unse Menge; stellen wir daher die Größen der Menge durch irgendeine Hau basis der Gruppe dar, so können wir uns auf die Betrachtung der da auftretenden Linearformen der Größen erster Dimension in der Hauptb beschränken, deren Menge wir mit M_1 bezeichnen. Die allgemeinste Gr vom Grade ϱ_1 ist dann nämlich von der Form $\varepsilon + \{2\}$, wo ε eine Gr aus M_1 bedeutet.

Nach Hilfssatz V gibt es nun unter den Größen von M_1 ein endlic oder höchstens abzählbar unendliches System S_1 von linear unabhängi Größen, durch die sich jede Größe von M_1 linear darstellen läßt. existiert also ein Hauptsystem erster Dimension S_1, dessen Größen sä lich vom Grade ϱ_1 sind, und durch die sich bis auf Größen zweiter St jede Größe vom Grade ϱ^1 linear darstellen läßt; wir wollen jedes Hau

ystem erster Dimension von dieser Eigenschaft als ein „volles System om Grade ϱ_1" bezeichnen. Diese Definition hängt nicht mehr ab von er Wahl der soeben benutzten Hauptbasis der Gruppe. Sind S_1 und S_1' wei verschiedene volle Systeme vom Grade ϱ_1, so bilden die Größen on S_1' bis auf Größen zweiter Stufe ein vollständiges System linear unbhängiger Linearformen der Größen von S_1 und umgekehrt.

Es ist denkbar, daß die Größen eines bestimmten vollen Systems om Grade ϱ_1 bereits ein volles Hauptsystem erster Dimension bilden. ann gilt dies für jedes volle System S_1 vom Grade ϱ_1, und wir nennen diesem Falle das System S_1 ein primitives volles Hauptsystem erster imension.

Im anderen Falle, wenn also kein volles System vom Grade ϱ_1 zueich bereits ein volles Hauptsystem erster Dimension ist, gibt es Größen ster Dimension, die nicht bis auf Größen zweiter Stufe als lineare Verndungen eines vollen Systems vom Grade ϱ_1 dargestellt werden können nd größeren Grad besitzen. Letzteres kann aber auch schon für gewisse neare Verbindungen der Größen eines bestimmten vollen Systems S_1 om Grade ϱ_1 eintreten, da die Menge aller Größen des Grades ϱ_1 keine neare Schar zu bilden braucht. Wir untersuchen nun die Gradzahlen $+1$, ϱ_1+2, ... daraufhin, ob es überhaupt Größen des betreffenden rades in der Gruppe gibt, und wenn, ob darunter solche sind, die nicht s auf Größen zweiter Stufe als lineare Verbindungen der Größen von S_1 rgestellt werden können. Es sei $\varrho_2 > \varrho_1$ die erste Gradzahl, für die tzteres eintritt, für die also nicht alle Größen des Grades ϱ_2 bis auf ößen zweiter Stufe als lineare Verbindungen von S_1 darstellbar sind. e Zahl ϱ_2 ist eine Invariante der Gruppe, die also nicht von der spellen Wahl des Systems S_1 abhängt, wie man sofort einsieht, wenn man n Zusammenhang zwischen zwei beliebigen vollen Systemen vom Grade ϱ_1 rücksichtigt.

Nach der Definition der Zahl ϱ_2 sind alle Größen vom Grade $< \varrho_2$ auf Größen zweiter Stufe durch das System S_1 linear darstellbar, ht alle Größen vom Grade ϱ_2. Wir betrachten nun die Menge aller öße vom Grade $\leqq \varrho_2$, die wir durch eine Hauptbasis darstellen. Es M_2 die Menge aller bei dieser Darstellung auftretenden linearen Verdungen der Größen erster Dimension dieser Hauptbasis. Die allgeinste Größe eines Grades $\leqq \varrho_2$ ist dann von der Form $\varepsilon + \{2\}$, wo ε M_2 gehört.

Nach Hilfssatz V gibt es dann unter den Größen von M_2 ein endes oder höchstens abzählbar unendliches System $\bar{S}_2$ von linear unhängigen Größen, durch das sich jede Größe von M_2 linear darstellen t. Insbesondere läßt sich also jede Größe von S_1 bis auf Größen

zweiter Stufe durch S_2 linear darstellen; die so erhaltenen linearen Ve bindungen von $\bar{S}_2$ bilden aber gewiß kein vollständiges System solch Verbindungen, da sich sonst nach Hilfssatz I jede lineare Verbindu von $\bar{S}_2$ bis auf Größen zweiter Stufe durch S_1 linear darstellen ließ während doch unter den linearen Verbindungen von $\bar{S}_2$ Größen vo Grade ϱ_2 vorkommen, für die das nicht möglich ist. Wir ergänzen da diese Linearformen von $\bar{S}_2$, d. h. die Größen von S_1, durch Hinzufügu gewisser Größen aus $\bar{S}_2$ selbst nach Hilfssatz II zu einem vollständig System linear unabhängiger Verbindungen von $\bar{S}_2$; die Ergänzungsgröß sind vom Grade ϱ_2, da sie sonst bis auf Größen zweiter Stufe durch linear darstellbar wären, was nicht der Fall ist, und haben außerdem d Eigenschaft, daß jede Größe vom Grade ϱ_2 bis auf Größen zweiter Stu durch eine aus ihnen und den Größen von S_1 gebildete lineare Verbi dung dargestellt werden kann. Sie bilden mit dem System S_1 zusamm ein Hauptsystem erster Dimension S_2; wir wollen nun jedes Hauptsyste erster Dimension, dessen Größen von den Graden ϱ_1 und ϱ_2 sind, u durch die sich bis auf Größen zweiter Stufe jede Größe vom Grade $\leqq$ linear darstellen läßt, während zugleich das Teilsystem der Größen vo Grade ϱ_1 ein volles System vom Grade ϱ_1 ist, als ein „volles System d Grade ϱ_1, ϱ_2" bezeichnen. Die Existenz eines solchen Systems ist a durch die vorstehenden Überlegungen bewiesen.

Ist S_2' ein zweites volles System der Grade ϱ_1, ϱ_2, dessen Größ vom Grade ϱ_1 das System S_1' bilden, so bilden die Größen von S_2' auf Größen zweiter Stufe ein vollständiges System linear unabhängig Linearformen von S_2 mit der Eigenschaft, daß die Größen von S_1' vollständiges System linear unabhängiger Verbindungen der Größen von allein darstellen.

Es ist denkbar, daß die Größen eines bestimmten vollen Systems Grade ϱ_1, ϱ_2 bereits ein volles Hauptsystem erster Dimension bild Dann gilt dies für jedes volle System S_2 der Grade ϱ_1, ϱ_2, und wir nenn in diesem Falle das System S_2 ein primitives volles Hauptsystem ers Dimension.

Im anderen Falle betrachten wir ähnlich wie oben die Gradzah $\varrho_2+1, \varrho_2+2, \ldots$ daraufhin, ob es überhaupt Größen des betreffend Grades in der Gruppe gibt, und finden eine kleinste Zahl $\varrho_3 > \varrho_2$, für nicht alle Größen des Grades ϱ_3 bis auf Größen zweiter Stufe als line Verbindungen eines Systems S_2 darstellbar sind. Diese Zahl erweist s als von der speziellen Wahl des Systems S_2 unabhängig, also als e Invariante der Gruppe. Wir bilden dann in analoger Weise wie soe ein Hauptsystem erster Dimension S_3, das das System S_2 umfaßt u außerdem gewisse Größen vom Grade ϱ_3 enthält, derart, daß jede Gr

om Grade $\leqq \varrho_3$ bis auf Größen zweiter Stufe als lineare Verbindung der rößen von S_3 dargestellt werden kann. Jedes System von dieser Art ezeichnen wir als ein „volles System der Grade $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$".

Setzt man dies Verfahren weiter fort, so gelangt man zu immer rößeren Gradzahlen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ Allgemein beweist man die Existenz von ewissen Invarianten der Gruppe $\varrho_1, \ldots, \varrho_\lambda$ und eines zugehörigen „vollen ystems S_λ der Grade $\varrho_1, \ldots, \varrho_\lambda$", wobei der Existenzbeweis für ein entprechendes System $S_{\lambda-1}$ als bereits erbracht angesehen wird, in folgender Veise: Unter einem vollen System S_λ der Grade $\varrho_1, \ldots, \varrho_\lambda$ verstehen wir in Hauptsystem erster Dimension, dessen Größen von den Graden $\varrho_1, \ldots, \varrho_\lambda$ nd, und durch das sich jede Größe vom Grade $\leqq \varrho_\lambda$ bis auf Größen weiter Stufe linear darstellen läßt, während das in S_λ enthaltene Teil ystem $S_{\lambda-1}$ der Größen von den Graden $\varrho_1, \ldots, \varrho_{\lambda-1}$ ein volles System er Grade $\varrho_1, \ldots, \varrho_{\lambda-1}$ bildet. Die Gradzahl ϱ_λ ist dabei der kleinste rad $> \varrho_{\lambda-1}$, für den es Größen gibt, die nicht bis auf Größen zweiter tufe als lineare Verbindungen der Größen eines vollen Systems $S_{\lambda-1}$ der rade $\varrho_1, \ldots, \varrho_{\lambda-1}$ darstellbar sind; diese Definition hängt nicht von der peziellen Wahl des Systems $S_{\lambda-1}$ ab. Hiermit ist der Begriff des vollen ystems durch Induktion definiert; es ergibt sich daraus, daß für jedes $= 1, \ldots, \lambda$ das Teilsystem S_i der in S_λ enthaltenen Größen der Grade $, \ldots, \varrho_i$ ein volles System dieser Grade bildet. Ferner ist nach den für $= 1$ und $\lambda = 2$ ausgeführten Überlegungen klar, daß, wenn S'_λ ein zweites olles System der Grade $\varrho_1, \ldots, \varrho_\lambda$, S'_i das in S'_λ enthaltene Teilsystem er Größen der Grade $\varrho_1, \ldots, \varrho_i$ ist $(i = 1, \ldots, \lambda)$, alsdann S'_i bis auf rößen zweiter Stufe ein vollständiges System linear unabhängiger Verindungen der Größen von S_i allein ist.

Nun nehmen die Gradzahlen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ beständig zu, während andererits jede Gradzahl $\leqq h$ ist. Daher muß das Verfahren einmal abbrechen. s muß also für ein bestimmtes $\lambda = \mu$ ein volles System S_μ der Grade , $\ldots, \varrho_\mu$ existieren, das ein volles Hauptsystem erster Dimension bildet. ies gilt alsdann für jedes volle System der Grade $\varrho_1, \ldots, \varrho_\mu$.

Definition VII. *Ein volles System der Grade $\varrho_1, \ldots, \varrho_\mu$, das zueich ein volles Hauptsystem erster Dimension ist, heißt ein primitives olles Hauptsystem erster Dimension.*

Es folgt nun sofort aus dieser Definition der

Satz 15. *Die Gradzahlen $\varrho_1, \ldots, \varrho_\mu$ der Größen eines primitiven ollen Hauptsystems erster Dimension sind Invarianten der Gruppe. ind S_μ und S'_μ zwei beliebige derartige Systeme, S_i und S'_i die in ihnen nthaltenen Teilsysteme der Größen der Grade $\varrho_1, \ldots, \varrho_i$ $(i = 1, \ldots, \mu)$,*

so bilden die Größen von S_i' bis auf Größen zweiter Stufe ein voll-ständiges System linear unabhängiger Verbindungen der Größen von S

Ebenso unmittelbar einleuchtend sind die beiden Sätze:

Satz 16. *Ist $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ ein primitives volles Hauptsystem erster Dimension, und ε irgendeine Größe erster Dimension vom Grade ϱ, so ist*

$$\varepsilon = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \ldots + \{2\}$$

der Koeffizient $a_i = 0$, wenn der Grad von ε_i größer als ϱ ist.

Satz 17. *Ist $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ ein primitives volles Hauptsystem erster Dimension und $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots$ irgendein volles Hauptsystem erster Dimension wird ferner in*

$$\varepsilon_i = a_{i1}\varepsilon_1' + a_{i2}\varepsilon_2' + \ldots + \{2\} \qquad (i = 1, 2, \ldots$$
$$\varepsilon_i'' = a_{i1}\varepsilon_1' + a_{i2}\varepsilon_2' + \ldots$$

gesetzt, so ist auch $\varepsilon_1'', \varepsilon_2'', \ldots$ ein primitives volles Hauptsystem erster Dimension.

Satz 18. *Ist $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ ein volles Hauptsystem erster Dimension von der Eigenschaft, daß keine lineare Verbindung der Größen des Systems einen kleineren Grad hat als jede darin mit einem von Null verschiedenen Koeffizienten auftretende Größe $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, so ist das System primitiv*

Es sei

$$\varepsilon_i' = a_{i1}\varepsilon_1 + a_{i2}\varepsilon_2 + \ldots + \{2\} \qquad (i = 1, 2, \ldots$$

ein primitives volles Hauptsystem erster Dimension; dann ist nach Satz 1 auch

$$\varepsilon_i'' = a_{i1}\varepsilon_1 + a_{i2}\varepsilon_2 + \ldots \tag{21}$$

ein primitives volles Hauptsystem erster Dimension. Insbesondere sei

$$S_1'' \tag{22}$$

das darin enthaltene volle System vom Grade ϱ_1. Nach Voraussetzung können in den Ausdrücken (21) dieser Größen nur Größen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ vom Grade $\leqq \varrho_1$ auftreten; und da ϱ_1 der kleinste überhaupt vorkommende Grad ist, so sind alle auftretenden Größen genau vom Grade ϱ_1. Diese mögen das System

$$S_1 \tag{23}$$

bilden; die Größen (23) bilden alsdann selbst ein volles System vom Grade ϱ. Denn jede Größe dieses Grades läßt sich bis auf Größen zweiter Stufe durch (22) linear ausdrücken, also auch durch (23).

Wir betrachten ferner das volle System

$$S_2'' \tag{24}$$

der Grade ϱ_1, ϱ_2 in (21). In den Ausdrücken dieser Größen dürfen

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ kommen außer den Größen (23) nach Voraussetzung nur Größen vom Grade $\leqq \varrho_2$ vor, also, da ϱ_2 der kleinste in Betracht kommende Grad ist, nur Größen vom genauen Grade ϱ_2. Es enthalte nun das System

(25) S_2

sämtliche Größen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, die in den Ausdrücken von (24) wirklich vorkommen, worunter also die Größen (23) enthalten sind. Dann bilden die Größen (25) ein volles System der Grade ϱ_1, ϱ_2. Denn jede Größe vom Grade $\leqq \varrho_2$ läßt sich bis auf Größen zweiter Stufe durch die Größen (24) linear ausdrücken, also auch durch die Größen (25).

Es ist klar, wie der Beweis weitergeht. Beim λ-ten Schritte ist wie oben zu verifizieren, daß die neu hinzutretenden Größen genau den richtigen Grad ϱ_λ haben, und das volle System der Grade $\varrho_1, \ldots, \varrho_{\lambda-1}$ zu einem vollen System der Grade $\varrho_1, \ldots, \varrho_\lambda$ ergänzen. Hiermit ist der Satz 18, der eine Umkehrung des Satzes 16 darstellt, bewiesen.

§ 4.

Allgemeine Eigenschaften der zerlegbaren Gruppen[15]).

Es sei eine Gruppe der Restklassen eines Moduls vorgelegt. Wir bezeichnen die Gruppe jetzt mit $\mathfrak{C}$, den Modul mit $\mathfrak{R}(z_1, \ldots, z_r)$.

Definition VIII. *Die Gruppe $\mathfrak{C}$ der Restklassen* mod $\mathfrak{R}$ *heißt zerlegbar in die beiden Faktoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, oder das Produkt von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, in Formeln*

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A},$$

wenn sie zwei Untergruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mit folgenden Eigenschaften enthält:

1. *Wenn $\mathfrak{S}$ irgendein System von endlich oder abzählbar unendlich vielen linear unabhängigen Größen ξ in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{T}$ irgendein entsprechendes System von Größen η in $\mathfrak{B}$ ist, so sind die aus den sämtlichen Produkten $\xi\eta$ je einer Größe von $\mathfrak{S}$ mit je einer Größe von $\mathfrak{T}$ bestehenden Größen des Systems $\mathfrak{S}\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{C}$ linear unabhängig.*

2. *Jede Größe von $\mathfrak{C}$ läßt sich bei geeigneter Wahl der Systeme $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ durch das System $\mathfrak{S}\mathfrak{T}$ linear darstellen.*

Aus dieser Definition geht unmittelbar hervor, daß jede zu einer zerlegbaren Gruppe isomorphe Gruppe ebenfalls zerlegbar ist, und daß die Faktoren respektive zu den Faktoren der ersten Gruppe isomorph sind.

---

[15]) Wie in der Einleitung bemerkt, ist der (multiplikative) Prozeß der Zerlegung natürlich nicht zu verwechseln mit dem (additiven) der Reduktion. Alle auftretenden Gruppen sind ja irreduzibel.

Sind umgekehrt in zwei zerlegbaren Gruppen die Faktoren beziehungsweis isomorph, so sind auch die Gruppen selbst isomorph.

Satz 19. *Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann zerlegbar in di beiden Faktoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, wenn in $\mathfrak{G}$ eine Basis der Form $\mathfrak{S}\mathfrak{T}$ existiert wo $\mathfrak{S}$ eine Basis von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{T}$ eine Basis von $\mathfrak{B}$ ist. Alsdann kann jed Basis von $\mathfrak{A}$ an die Stelle von $\mathfrak{S}$, jede Basis von $\mathfrak{B}$ an die Stelle von $\mathfrak{T}$ treten.*

Daß die Bedingung für eine nach Definition VIII zerlegbare Grupp stets erfüllt ist, ist klar; denn wegen 1. sind die Größen von $\mathfrak{S}\mathfrak{T}$ linea unabhängig, wegen 2. gibt es für jedes $\mathfrak{z}$ in $\mathfrak{G}$ zwei Systeme $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{T}'$ so daß $\mathfrak{z}$ durch $\mathfrak{S}'\mathfrak{T}'$ linear darstellbar ist; nun ist aber $\mathfrak{S}'$ durch $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}'$ durch $\mathfrak{T}$ linear darstellbar, also ist $\mathfrak{S}'\mathfrak{T}'$ durch $\mathfrak{S}\mathfrak{T}$, also auch durch $\mathfrak{S}\mathfrak{T}$ linear darstellbar.

Ist umgekehrt die Bedingung von Satz 19 erfüllt, so gilt die Bedingung 2. von Definition VIII. Um auch 1. zu verifizieren, ergänzen wir das dortige System $\mathfrak{S}$ nach Hilfssatz II zu einer Basis $\mathfrak{E} = (\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots)$ von $\mathfrak{A}$, das dortige System $\mathfrak{T}$ zu einer Basis $\mathfrak{F} = (\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots)$ von $\mathfrak{B}$. Ist nun $\mathfrak{S} = (\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \ldots)$ eine Basis von $\mathfrak{A}$, und $\mathfrak{T} = (\mathfrak{y}', \mathfrak{y}'', \ldots)$ eine Basis von $\mathfrak{B}$, für die $\mathfrak{S}\mathfrak{T}$ eine Basis von $\mathfrak{G}$ ist, so gilt nicht nur

$$\mathfrak{e}_i = \sum_j a_{ij} \mathfrak{x}^{(j)}$$

$$\mathfrak{f}_k = \sum_l b_{kl} \mathfrak{y}^{(l)},$$

wobei die Matrizen (a_{ij}) und (b_{kl}) abgeschlossen sind, sondern es folgt auch aus

$$\sum_{i,k} c_{ik} \mathfrak{e}_i \mathfrak{f}_k = 0$$

die Gleichung

$$\sum_{i,k} c_{ik} a_{ij} b_{kl} = 0,$$

also durch Multiplikation mit den reziproken Matrizen (A_{jr}) und (B_{ls})

$$\sum_{\substack{i,k \\ j,l}} c_{ik} a_{ij} b_{kl} A_{jr} B_{ls} = 0$$

und daher

$$c_{rs} = 0.$$

Da ferner offenbar jede Größe von $\mathfrak{G}$ durch $\mathfrak{E}\mathfrak{F}$ linear darstellbar ist, so ist auch $\mathfrak{E}\mathfrak{F}$ eine Basis von $\mathfrak{F}$; die Systeme $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{T}$ sind also vollständig gleichberechtigt.

Es sei jetzt in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ eine Basis $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ von der Eigenschaft vorhanden, daß in ihr die Haupteinheit $\mathfrak{x}' = 1$, $\mathfrak{y}' = 1$ vorkommt, und daß in den Ausdrücken aller Produkte der übrigen Basisgrößen $\mathfrak{x}''$, $\mathfrak{x}'''$, ... und $\mathfrak{y}''$, $\mathfrak{y}'''$, ... nur diese Größen selbst, also nicht die Haupteinheit $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{y}'$ vorkommt. Dann ist nach Satz 19 $\mathfrak{S}\mathfrak{T}$ eine Basis von $\mathfrak{C}$, und diese genügt offenbar den Bedingungen des Hilfssatzes VI.

Wir definieren nun als $\mathfrak{A}$-Komponente einer Größe $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{C}$ den Bestandteil, der bei der Darstellung der Größe durch die Basis $\mathfrak{S}\mathfrak{T}$ der Gruppe $\mathfrak{A}$ angehört, also durch das in $\mathfrak{S}\mathfrak{T}$ enthaltene System $\mathfrak{S}$ selbst linear dargestellt wird, als $\mathfrak{B}$-Komponente den Bestandteil, der bei dieser Darstellung der Gruppe $\mathfrak{B}$ angehört, also durch das in $\mathfrak{S}\mathfrak{T}$ enthaltene System $\mathfrak{T}$ dargestellt wird. Für eine fest gewählte Basis $\mathfrak{S}\mathfrak{T}$ ist dann jedenfalls die $\mathfrak{A}$- bzw. $\mathfrak{B}$-Komponente eindeutig durch die Größe $\mathfrak{z}$ bestimmt. Im übrigen ist die $\mathfrak{A}$-Komponente sogar unabhängig von der Basis $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{A}$. — Entsprechendes gilt von der $\mathfrak{B}$-Komponente.

Hilfssatz VIII. *Die $\mathfrak{A}$- bzw. $\mathfrak{B}$-Komponente der Summe und des Produktes zweier Größen von $\mathfrak{C}$ ist die Summe und das Produkt der $\mathfrak{A}$- bzw. $\mathfrak{B}$-Komponenten der beiden Größen.*

In der Tat ist Summe und Produkt zweier Größen von $\mathfrak{A}$ wieder eine Größe von $\mathfrak{A}$; ferner ist eine lineare Verbindung mehrerer nicht zur Gruppe $\mathfrak{A}$ gehörenden Bestandteile der Basis $\mathfrak{S}\mathfrak{T}$ ebensowenig zu $\mathfrak{A}$ gehörig, wie das Produkt einer beliebigen Größe mit einem nicht zu $\mathfrak{A}$ gehörenden Bestandteil der Basis $\mathfrak{S}\mathfrak{T}$, letzteres wegen der speziellen Wahl dieser Basis.

Satz 20. *Jeder Faktor $\mathfrak{A}$ einer Gruppe $\mathfrak{C}$ der Restklassen* mod $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(z_1, \ldots, z_r)$, *dessen komplementärer Faktor eine den Bedingungen des Hilfssatzes VI genügende Basis besitzt, kann als Gruppe der Restklassen eines endlichen Moduls aufgefaßt werden*[16]).

Es seien $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_r$ die Restklassen von $z_1, \ldots, z_r$ mod $\mathfrak{R}$, also ein System von endlich vielen Größen in $\mathfrak{C}$, durch deren ganze rationalen Funktionen jede Größe von $\mathfrak{C}$ dargestellt werden kann. Wir behaupten, daß auch in $\mathfrak{A}$ ein solches System existiert. Dazu betrachten wir eine Basis $\mathfrak{T}$ des komplementären Faktors, die den Bedingungen des Hilfssatzes VI genügt, und eine beliebige Basis $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{A}$, und bilden die $\mathfrak{T}$-Komponenten von $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_r$ in der Basis $\mathfrak{S}\mathfrak{T}$. Durch Vergleichung der $\mathfrak{A}$-Komponenten sieht man dann ein, daß jede Größe von $\mathfrak{A}$ als

[16]) Der Satz ist nicht trivial, da nicht jede Untergruppe diese Eigenschaft zu haben braucht; man betrachte z. B. den Modul $\mathfrak{M}(x_1, x_2) = (x_2^2)$ und die aus der Haupteinheit und allen Wurzelgrößen bestehende Untergruppe.

ganze rationale Funktion der $\mathfrak{A}$-Komponenten von $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_r$ dargestel werden kann, womit der Satz bewiesen ist.

Satz 21. *Ist* $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ *und* $\mathfrak{A}$ *Gruppe der Restklassen* mod $\mathfrak{M}(x_1, \ldots, x_m$ $\mathfrak{B}$ *Gruppe der Restklassen* mod $\mathfrak{N}(y_1, \ldots, y_n)$, *so ist* $\mathfrak{C}$ *isomorph zu Gruppe der Restklassen* mod $\mathfrak{R}(x_1, \ldots, y_n) = (\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$[17]).

Es sei sowohl $\mathfrak{M}$ als auch $\mathfrak{N}$ von 1 verschieden. Wir betrachte je ein System von Funktionen der Variablen $x_1, \ldots, x_m$ bzw. $y_1, \ldots,$ von $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{N}$, das aus je abzählbar vielen[18]) Funktionen besteht, d dem Grade nach geordnet sind und die Eigenschaft haben, daß ih höchsten Bestandteile linear unabhängig sind, während jede Funktion v $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{N}$ durch endlich viele Funktionen des betreffenden Syste linear dargestellt werden kann:

$$F_\alpha^{(1)}, \ldots, F_\alpha^{(p_\alpha)} \qquad (\alpha = \mu, \mu+1, \ldots) \quad (\mu \geqq \tag{26}$$

$$G_\beta^{(1)}, \ldots, G_\beta^{(q_\beta)} \qquad (\beta = \nu, \nu+1, \ldots) \quad (\nu \geqq \tag{27}$$

$F_\alpha^{(\varkappa)}$ bedeutet dabei eine Funktion α-ten Grades in $x_1, \ldots, x_m$, G eine solche β-ten Grades in $y_1, \ldots, y_n$[19]). Ferner sei

$$f_\alpha^{(1)}, \ldots, f_\alpha^{(r_\alpha)} \qquad (\alpha = 0, 1, \tag{28}$$

und

$$g_\beta^{(1)}, \ldots, g_\beta^{(s_\beta)} \qquad (\beta = 0, 1, \tag{29}$$

je ein System von $\varphi(m, \alpha) - p_\alpha$ bzw. $\varphi(n, \beta) - s_\beta$ Formen in $x_1, \ldots, x$ bzw. $y_1, \ldots, y_n$, die respektive die höchsten Bestandteile von (26) un (27) zu einem vollständigen System von $\varphi(m, \alpha)$ bzw. $\varphi(n, \beta)$ linea unabhängigen Formen des Grades α bzw. β in den bezüglichen Variable ergänzen. Dann bilden die Größen

$$f_\alpha^{(1)}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m), \ldots, f_\alpha^{(r_\alpha)}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m) \qquad (\alpha = 0, 1, \tag{30}$$

und

$$g_\beta^{(1)}(\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n), \ldots, g^{(s_\beta)}(\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n) \qquad (\beta = 0, 1, \tag{31}$$

je eine Basis der Gruppe $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

---

[17]) Geometrische Folgerung: Das Gebilde des Moduls $\mathfrak{R}$ wird der vollständig Schnitt der über den Projektionen des Gebildes in den x- bzw. y-Raum errichtete „Zylinder".

[18]) Außer wenn der betreffende Modul nur die Funktion 0 enthält; dann en hält auch das Funktionensystem nur diese.

[19]) Die Zahlen $p_0, \ldots, p_{\mu-1}$ und $q_0, \ldots, q_{\nu-1}$ setzen wir $= 0$

Wir suchen nun hieraus ein entsprechendes System für den Modul $\mathfrak{R}$ ufzustellen. Seine Funktionen γ-ten Grades lassen sich offenbar linear usammensetzen aus den Funktionen

32) $y_1^{\beta_1} \dots y_n^{\beta_n} F_\alpha^{(1)}, \dots, y_1^{\beta_1} \dots y_n^{\beta_n} F_\alpha^{(p_\alpha)}$ $(\beta_1 + \dots + \beta_n = \beta = \gamma - \alpha;$ $\alpha = \mu, \mu + 1, \dots)$

33) $x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m} G_\beta^{(1)}, \dots, x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m} G_\beta^{(q_\beta)}$ $(\alpha_1 + \dots + \alpha_m = \alpha = \gamma - \beta;$ $\beta = \nu, \nu + 1, \dots).$

ie Bestandteile höchsten Grades aller dieser Funktionen sind nun andererits lineare Kombinationen der höchsten Bestandteile der Funktionen

34) $F_\alpha^{(i)} g_\beta^{(l)}, f_\alpha^{(k)} G_\beta^{(j)}, F_\alpha^{(i)} G_\beta^{(j)} \begin{pmatrix} \alpha = 0, 1, \dots; & i = 1, \dots, p_\alpha; & k = 1, \dots, r_\alpha \\ \beta = 0, 1, \dots; & j = 1, \dots, q_\beta; & l = 1, \dots, s_\beta \end{pmatrix}$[20],

a jedes Potenzprodukt α-ten Grades in $x_1, \dots, x_m$ durch die höchsten estandteile von (26) und (28), jedes Potenzprodukt β-ten Grades von , ..., y_n durch die höchsten Bestandteile von (27) und (29) linear rgestellt werden kann. Ergänzt man die Ausdrücke (34) durch die unktionen

35) $f_\alpha^{(k)} g_\beta^{(l)} \quad \begin{pmatrix} \alpha = 0, 1, \dots; & k = 1, \dots, r_\alpha \\ \beta = 0, 1, \dots; & l = 1, \dots, s_\beta \end{pmatrix},$

erhält man in (34) und (35) zusammen $\varphi(m, \alpha) \cdot \varphi(n, \beta)$ Bestandteile öchsten Grades[21]). Jedes einzelne der Systeme (34) bzw. (35) enthält bei respektive $p_\alpha s_\beta$, $r_\alpha q_\beta$, $p_\alpha q_\beta$, $r_\alpha s_\beta$ linear unabhängige höchste Bendteile.

Im ganzen erhält man daher

$$\sum_{\alpha+\beta=\gamma} \varphi(m, \alpha)\varphi(n, \beta) = \varphi(m+n, \gamma)$$

ear unabhängige Formen γ-ten Grades in $x_1, \dots, y_n$, d. h. ein vollndiges System solcher Formen.

Bildet man daher für jedes Wertsystem α, β mit der Summe γ die ntlichen von Null verschiedenen Funktionen (34), so erhält man die nktionen γ-ten Grades des gesuchten Systems von $\mathfrak{R}$. Denn diese nktionen haben sämtlich linear unabhängige höchste Bestandteile und le Funktion γ-ten Grades von $\mathfrak{R}$ läßt sich durch diese linear darstellen. e Größen

36) $f_\alpha^{(k)}(\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_m)\, g_\beta^{(l)}(\mathfrak{y}_1, \dots, \mathfrak{y}_n) \quad \begin{pmatrix} \alpha = 0, 1, \dots; & k = 1, \dots, r_\alpha \\ \beta = 0, 1, \dots; & l = 1, \dots, s_\beta \end{pmatrix}$

[20]) In den Ausdrücken (34) bedeuten die Funktionen $F_\alpha^{(i)}$, $G_\beta^{(j)}$ für $\alpha = 0, \dots, \mu - 1$; $0, \dots, \nu - 1$ die Funktion Null.

[21]) Vgl. den Hilfssatz P., S. 70.

bilden demnach eine Basis der Gruppe der Restklassen mod $\mathfrak{R}$. Dies ist daher nach Satz 19 zerlegbar in zwei zu $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ isomorphe Faktoren ist also zu $\mathfrak{C}$ isomorph.

Umgekehrt zeigt Satz 21 auch, wie man zwei Gruppen $\mathfrak{A}$ und eine Gruppe $\mathfrak{C}$ als ihr Produkt zuordnen kann. Man bildet dazu ein fach die Gruppe der Restklassen mod $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, wo $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(x_1, \ldots, x_m)$ ein zur Gruppe $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(y_1, \ldots, y_n)$ ein zur Gruppe $\mathfrak{B}$ gehörend Modul ist. Selbstverständlich wird dann das Produkt von zwei zu und $\mathfrak{B}$ isomorphen Gruppen zu $\mathfrak{C}$ isomorph sein.

Satz 22. *Ist* $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{E}$, *so ist* $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}(\mathfrak{D}\mathfrak{E})$.

Dies folgt direkt aus Satz 19. In der Tat sei $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots$ eine Bas der Gruppe $\mathfrak{A}$. Dann gibt es in $\mathfrak{B}$ eine Basis von der Gestalt

$$\mathfrak{e}_i \mathfrak{f}_k \qquad (i = 1, 2, \ldots;\ k = 1, 2, \ldots$$

wo $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots$ eine Basis von $\mathfrak{E}$ ist. Also gibt es in $\mathfrak{C}$ eine Basis v der Gestalt

$$(\mathfrak{e}_i \mathfrak{f}_k)\mathfrak{g}_l = \mathfrak{e}_i(\mathfrak{f}_k \mathfrak{g}_l) \quad (i = 1, 2, \ldots;\ k = 1, 2, \ldots;\ l = 1, 2, \ldots$$

wobei $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots$ eine Basis von $\mathfrak{D}$ ist; dies zeigt, daß $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}(\mathfrak{D}\mathfrak{E})$ i

Satz 23. *Die Faktoren einer irreduziblen Gruppe sind irreduzib*

Ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{S}_i$ irgendein zu $\mathfrak{A}_i$ $(i = 1, 2)$ gehörendes Syste linear unabhängiger Größen, ferner $\mathfrak{T}$ ein entsprechendes System in so sind die Größen der Systeme $\mathfrak{S}_1\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{S}_2\mathfrak{T}$ unter sich und unt einander linear unabhängig. Ist speziell $\mathfrak{S}_i$ eine Basis in $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{T}$ eine Ba in $\mathfrak{B}$, so bilden diese Größen eine Basis in $\mathfrak{C}$. Daher ist jede Größe von $\mathfrak{C}$ eindeutig in der Form

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{x} + \mathfrak{y}$$

darstellbar, wo $\mathfrak{x}$ durch das System $\mathfrak{S}_1\mathfrak{T}$, $\mathfrak{y}$ durch das System $\mathfrak{S}_2\mathfrak{T}$ line dargestellt ist. Alle Größen $\mathfrak{x}$ bzw. $\mathfrak{y}$ bilden ferner eine Untergrup von $\mathfrak{C}$, die nach Satz 19 gleich dem Produkte $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}$ ist. De Summe und Produkt zweier Größen $\mathfrak{x}$ sind wieder Größen $\mathfrak{x}$, und Haup einheit ist die Haupteinheit von $\mathfrak{A}_1$. Entsprechendes gilt für die and Gruppe. Ferner ist stets $\mathfrak{x}\mathfrak{y} = 0$, weil dies gilt, wenn $\mathfrak{x}$ zu $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{y}$ zu gehört. Also ist

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A}_1\mathfrak{B} + \mathfrak{A}_2\mathfrak{B},$$

d. h. reduzibel in die beiden Bestandteile $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}$, also nur in duzibel, wenn $\mathfrak{A}_1 = 0$ oder $\mathfrak{A}_2 = 0$ ist.

Satz 24. *Das Produkt zweier Stammgruppen ist eine Stammgrup*

Es sei $\mathfrak{A}_0$ die Gruppe der Restklassen mod $\mathfrak{M}_0(x_1, \ldots, x_m)$, $\mathfrak{B}_0$ Gruppe der Restklassen mod $\mathfrak{N}_0(y_1, \ldots, y_n)$, und es folge $F(x_1, \ldots, x_m) = 0$ für alle Nullstellen von $\mathfrak{M}_0$ stets $F \equiv 0(\mathfrak{M}_0)$,

$(y_1, \ldots, y_n) = 0$ für alle Nullstellen von $\mathfrak{N}_0$ stets $G \equiv 0 (\mathfrak{N}_0)$. Ferner sei
$\mathfrak{x}'', \ldots, \mathfrak{y}', \mathfrak{y}'', \ldots$ je eine Basis von $\mathfrak{A}_0$ bzw. $\mathfrak{B}_0$, wobei $\mathfrak{x}^{(i)} = f_i(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m)$,
$^{(j)} = g_j(\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n)$ sei. Dann bilden die Größen $\mathfrak{x}^{(i)}\mathfrak{y}^{(j)}$ $(i = 1, 2, \ldots;$
$= 1, 2, \ldots)$ eine Basis von $\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}_0$. Wir betrachten eine beliebige Größe

7) $$\mathfrak{z} = \sum_{i,j} c_{ij}\mathfrak{x}^{(i)}\mathfrak{y}^{(j)} = \sum_j \Big(\sum_i c_{ij}\mathfrak{x}^i\Big)\mathfrak{y}^{(j)},$$

der nicht alle Koeffizienten c_{ij} verschwinden, und behaupten, daß $\mathfrak{z}$
ine Wurzelgröße ist. Dazu wählen wir eine Zahl j_1 aus, für die ein
oeffizient c_{ij_1} von Null verschieden ist und betrachten eine solche Null-
elle $\xi_1, \ldots, \xi_m$ von $\mathfrak{M}_0$, für die

$$\sum_i c_{ij_1} f_i(\xi_1, \ldots, \xi_m) = \alpha_{j_1}$$

n Null verschieden ist; diese gibt es, da die Größe $\sum_i c_{ij_1}\mathfrak{x}^{(i)}$ von Null
rschieden, also keine Wurzelgröße von $\mathfrak{A}$ ist. Dann ist in

$$\sum_j \alpha_j \mathfrak{y}^{(j)},$$

nn allgemein $\sum_i c_{ij} f_i(\xi_1, \ldots, \xi_m) = \alpha_j$ gesetzt wird, nicht jeder Koef-
ient Null; es gibt also eine Nullstelle $\eta_1, \ldots, \eta_m$ von $\mathfrak{N}_0$, für die

$$\sum_j d_j g_j(\eta_1, \ldots, \eta_n) = \sum_{i,j} c_{ij} f_i(\xi_1, \ldots, \xi_m) g_j(\eta_1, \ldots, \eta_n) \neq 0$$

. Dann kann aber die Größe (37) keine Wurzelgröße sein, da die
nktion

$$\sum c_{ij} f_i(x_1, \ldots, x_m) g_j(y_1, \ldots, y_n)$$

Punkte $\xi_1, \ldots, \eta_n$ nicht verschwindet.

Satz 25. *Das Produkt zweier Stammgruppen der beiden Faktoren eine Stammgruppe des Produktes.*

Es sei $\mathfrak{S}_0 = (\mathfrak{x}_0', \mathfrak{x}_0'', \ldots)$, $\mathfrak{T}_0 = (\mathfrak{y}_0', \mathfrak{y}_0'', \ldots)$ die Basis je einer Stamm-
ppe $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{B}_0$ von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{S}_1 = (\mathfrak{x}_1', \mathfrak{x}_1'', \ldots)$, $\mathfrak{T}_1 = (\mathfrak{y}_1', \mathfrak{y}_1'', \ldots)$ je
System von linear unabhängigen Wurzelgrößen von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$, durch
sich jede Größe von $\mathfrak{A}_1$ bzw. $\mathfrak{B}_1$ linear darstellen läßt. Dann bilden
Größen

8) $$\mathfrak{S}_0\mathfrak{T}_0$$

9) $$\mathfrak{S}_0\mathfrak{T}_1, \quad \mathfrak{S}_1\mathfrak{T}_0, \quad \mathfrak{S}_1\mathfrak{T}_1$$

ammen eine Basis von $\mathfrak{C}$. Hierbei sind die Größen $\mathfrak{S}_0\mathfrak{T}_0$ nach dem
igen Satze die Basis einer Stammgruppe, also gibt es unter ihren

linearen Verbindungen keine Wurzelgrößen. Es ist also nur zu zeige daß die Größen (39) sämtlich Wurzelgrößen sind. Dies ist aber der Fa denn jede aus ihnen gebildete Linearform hat die Gestalt $\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}$ wo $\mathfrak{z}_1$ eine Linearform aus $\mathfrak{S}_0\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{z}_2$ eine solche aus $\mathfrak{S}_1\mathfrak{T}_0$, $\mathfrak{z}_3$ eine solc aus $\mathfrak{S}_1\mathfrak{T}_1$ ist, und es ist, wenn h und k die Dimensionen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sin

$$(\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_3)^{h+k+1} = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=h+k+1} c_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\mathfrak{z}_1^{\alpha_1}\mathfrak{z}_2^{\alpha_2}\mathfrak{z}_3^{\alpha_3} = 0,$$

weil in jedem Gliede rechts entweder $\alpha_2 + \alpha_3 > h$, oder $\alpha_1 > k$ ist.

Hieraus ergibt sich übrigens, daß die Dimension von $\mathfrak{C}$ höchste $= h + k$ ist, was wir für später anmerken.

Satz 26. *Die Mannigfaltigkeit des Produktes ist die Summe d Mannigfaltigkeiten der beiden Faktoren.*

Dies folgt unmittelbar aus Satz 21 und der Definition der Mann faltigkeit einer Gruppe.

Wir stellen nun eine beliebige Größe von $\mathfrak{C}$ durch die Basis (38), (3 dar und nennen den Bestandteil bei dieser Darstellung, der der Unte gruppe $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0$ angehört, also durch die Systeme $\mathfrak{S}_0\mathfrak{T}_0$ und $\mathfrak{S}_1\mathfrak{T}_0$ line dargestellt werden kann, die $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0$-Komponente der Größe, den Bestandte der der Untergruppe $\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}$ angehört, also durch die Systeme $\mathfrak{S}_0\mathfrak{T}_0$ u $\mathfrak{S}_0\mathfrak{T}_1$ dargestellt werden kann, die $\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}$-Komponente der Größe. Hierb ist die $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0$-Komponente unabhängig von der speziellen Wahl der Syste $\mathfrak{S}_0$ und $\mathfrak{S}_1$, dagegen abhängig von der Wahl der Stammgruppe $\mathfrak{B}_0$. I fester Wahl von $\mathfrak{B}_0$ ist aber die $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0$-Komponente eindeutig durch die treffende Größe bestimmt. Entsprechendes gilt von der $\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}$-Komponen Die folgenden Sätze beziehen sich auf solche Komponenten, die zu für allemal festgewählten Stammgruppen $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{B}_0$ gehören.

Hilfssatz IX. *Die $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0$- bzw. $\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}$-Komponente der Summe u des Produktes zweier Größen von $\mathfrak{C}$ ist die Summe und das Produkt d $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0$- bzw. $\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}$-Komponenten der beiden Größen.*

In der Tat ist die Summe und das Produkt zweier Größen von $\mathfrak{A}$ wieder eine Größe von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0$. Ferner ist die Summe zweier durch Systeme $\mathfrak{S}_0\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{S}_1\mathfrak{T}_1$ darstellbaren Größen wieder eine solche Größ endlich ist das Produkt einer durch die Systeme $\mathfrak{S}_0\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{S}_1\mathfrak{T}_1$ linear d stellbaren Größe mit einer beliebigen Größe von $\mathfrak{C}$ nach Satz 4 wie durch diese Systeme darstellbar.

Hilfssatz X. *Hat eine Größe in $\mathfrak{C}$ die Dimension α, so hat j ihrer Komponenten eine Dimension $\geqq \alpha$ in der betreffenden Untergrup*

Folgt direkt aus Hilfssatz VIII und IX, weil wegen Satz 3 j Komponente einer Wurzelgröße selbst eine Wurzelgröße der betreffen Untergruppe ist.

Satz 27. *Es bedeute $\mathfrak{S}_\alpha$ ein volles Hauptsystem α-ter Dimension in $\mathfrak{A}$ $(0 \leqq \alpha \leqq h)$, $\mathfrak{T}_\beta$ ein volles Hauptsystem β-ter Dimension in $\mathfrak{B}$ $(0 \leqq \beta \leqq k)$*[22]*). Wir schreiben ferner die aus den Systemen $\mathfrak{S}_\alpha$, $\mathfrak{T}_\beta$ gebildete Hauptbasis von $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ symbolisch*

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_1 + \ldots + \mathfrak{S}_h;$$
$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_0 + \mathfrak{T}_1 + \ldots + \mathfrak{T}_k;$$

rner sei $\mathfrak{S}\mathfrak{T}$ die nach Satz 19 aus $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ gebildete Basis von $\mathfrak{C}$. ann ist $\mathfrak{S}\mathfrak{T}$ eine Hauptbasis von $\mathfrak{C}$, die aus den vollen Hauptsystemen ter Dimension in $\mathfrak{C}$

0) $$\mathfrak{U}_\gamma = \sum_{\alpha+\beta=\gamma} \mathfrak{S}_\alpha \mathfrak{T}_\beta \qquad (0 \leqq \gamma \leqq h+k)$$

steht.

Für $\gamma = h + k$ wird also insbesondere behauptet, daß

1) $$\mathfrak{S}_h \mathfrak{T}_k$$

n volles Hauptsystem $(h+k)$-ter Dimension ist. In der Tat sind die mtlichen Größen dieses Systems von Null verschieden und linear unabngig, nach Definition VIII, 2. Ferner sind es Größen $(h+k)$-ter Stufe, o $(h+k)$-ter Dimension, da nach einer Bemerkung beim Beweise von tz 25 die Dimension von $\mathfrak{C}$ höchstens gleich $h+k$ ist, und bilden her ein Hauptsystem dieser Dimension. Irgendeine Größe $(h+k)$-ter mension in $\mathfrak{C}$ ist aber eine lineare Verbindung von Produkten, die nau h Faktoren aus $\mathfrak{A}_1$ und k Faktoren aus $\mathfrak{B}_1$ enthalten[23]); diese ilprodukte sind also lineare Verbindungen der Größen von $\mathfrak{S}_h$ bzw. $\mathfrak{T}_k$. her ist die Größe selbst eine lineare Verbindung von Größen des stems (41), womit gezeigt ist, daß dies System ein vollständiges Hauptstem $(h+k)$-ter Dimension ist. Insbesondere folgt hieraus natürlich

Satz 28. *Die Dimension des Produktes zweier Gruppen ist die mme der Dimensionen der beiden Gruppen.*

Sei nun die Behauptung des Satzes 27 bereits für alle Werte $+1), \ldots, (h+k)$ bewiesen, so betrachten wir das System (40) für n Wert γ. Alle Größen des Systems sind von Null verschieden und ear unabhängig, nach Definition VIII, 1. Aus demselben Grunde sind aber auch Größen genau γ-ter Dimension, weil ja nach Voraussetzung e Größe $(\gamma+1)$-ter Stufe durch die Systeme (40) für die Werte $+1), \ldots, (h+k)$ darstellbar ist. Das System (40) bildet daher ein uptsystem γ-ter Dimension. Irgendeine Größe γ-ter Dimension ist aber dererseits eine lineare Verbindung von Produkten, die genau α Faktoren

[22]) Für alle übrigen Indexwerte setzen wir formal $\mathfrak{S}_\alpha = 0$, $\mathfrak{T}_\beta = 0$.

[23]) Man denke sich jede Wurzelgröße durch die Basis (39) ausgedrückt.

aus $\mathfrak{A}_1$ und β Faktoren aus $\mathfrak{B}_1$ enthalten, wobei $\alpha + \beta = \gamma$ ist; und die Teilprodukte sind lineare Verbindungen von $\mathfrak{S}_\alpha, \ldots, \mathfrak{S}_h$ bzw. $\mathfrak{T}_\beta, \ldots, \mathfrak{T}$ Daher ist die Größe selbst eine lineare Verbindung der Größen der Syste

$$\mathfrak{S}_i \mathfrak{T}_j \qquad (i = \alpha, \ldots, h;\ j = \beta, \ldots, k$$

d. h. eine lineare Verbindung der Systeme (40) für die Werte $\gamma, \ldots, (h+k$ Daher bilden die Größen des Systems (40) für den Wert γ ein vollständig Hauptsystem γ-ter Dimension, und der Satz ist allgemein bewiesen.

Wir formulieren wegen ihrer Wichtigkeit nochmals die Fälle $\gamma =$ und $\gamma = 1$:

Satz 29. *In den Bezeichnungen von Satz 27 ist*

$$\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{S}_0 \mathfrak{T}_0$$

ein volles Hauptsystem nullter Dimension,

$$\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{S}_0 \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{S}_1 \mathfrak{T}_0$$

ein volles Hauptsystem erster Dimension in $\mathfrak{C}$.

Insbesondere ist also, falls ε und η zwei Größen erster Dimension $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind, jede Größe der Systeme $\varepsilon \mathfrak{T}_0$ und $\eta \mathfrak{S}_0$ von der erst Dimension in $\mathfrak{C}$. Allgemeiner gilt

Satz 30. *Ist die Größe* ξ *in* $\mathfrak{A}$ *von der Dimension* α, *die Größe* η *in* $\mathfrak{B}$ *von der Dimension* β, *so ist die Größe* $\xi\eta$ *in* $\mathfrak{C}$ *von der Dimensi* $\alpha + \beta$.

Nach Satz 13 tritt in der Darstellung von ξ durch die Hauptba $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{A}$ eine Größe von $\mathfrak{S}_\alpha$ mit von Null verschiedenen Koeffizienten a während keine Größe eines Systems $\mathfrak{S}_\alpha$ mit kleinerem Index vorkom Entsprechendes gilt für η und $\mathfrak{T}_\beta$. Daher findet man durch Multiplikati daß in der Darstellung von $\xi\eta$ durch die Hauptbasis $\mathfrak{S}\mathfrak{T}$ eine Größe v $\mathfrak{S}_\alpha \mathfrak{T}_\beta$, also von $\mathfrak{U}_{\alpha+\beta}$ mit einem von Null verschiedenen Koeffizient auftritt, dagegen keine Größe aus einem Systeme $\mathfrak{U}_\gamma$ mit niedriger Index. Nach Satz 13 ist also die Dimension von $\xi\eta$ gleich $\alpha + \beta$.

Für $\eta = 1$ ergibt sich speziell, daß ξ auch in $\mathfrak{C}$ von der Dimension α i

Satz 31. *Es habe*

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_1 + \ldots + \mathfrak{S}_h$$

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_0 + \mathfrak{T}_1 + \ldots + \mathfrak{T}_k$$

dieselbe Bedeutung wie in Satz 27; es sei aber spezieller $\mathfrak{S}_2, \ldots,$ *gemäß Satz 14 aus* $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_k$ *gemäß Satz 14 aus* $\mathfrak{T}_1$ *erzeu Ferner enthalte sowohl* $\mathfrak{S}_0$ *als auch* $\mathfrak{T}_0$ *die Haupteinheit. Dann ist*

$$\mathfrak{S}\mathfrak{T} = \mathfrak{U}_0 + \mathfrak{U}_1 + \ldots + \mathfrak{U}_{h+k}$$

ine Hauptbasis in $\mathfrak{C}$, *in der* $\mathfrak{U}_2, \ldots, \mathfrak{U}_{h+k}$ *aus*

$$\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{S}_0\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{S}_1\mathfrak{T}_0$$

emäß Satz 14 *erzeugt ist.*

In der Tat ist, weil $\mathfrak{S}_0$ und $\mathfrak{T}_0$ beide die Haupteinheiten enthalten, in $_1$ sowohl das System $\mathfrak{S}_1$ als auch das System $\mathfrak{T}_1$ enthalten. Folglich lassen ch aus $\mathfrak{U}_1$ sowohl die Systeme $\mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_h$ als auch die Systeme $\mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_k$ emäß Satz 14 bilden; ebenso sind die Systeme $\mathfrak{S}_0\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{S}_1\mathfrak{T}_0$ in $\mathfrak{U}_1$ nthalten, also auch $\mathfrak{S}_0\mathfrak{T}_\beta$ und $\mathfrak{S}_\alpha\mathfrak{T}_0$ daraus ableitbar. Daher ist endlich auch

$$\mathfrak{U}_\gamma = \sum_{\alpha+\beta=\gamma} \mathfrak{S}_\alpha\mathfrak{T}_\beta$$

emäß Satz 14 daraus ableitbar.

Satz 32. *Es sei* $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ *und* $\mathfrak{A}'$ *bzw.* $\mathfrak{B}'$ *die aus den Systemen* $\mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_1'$ *bzw.* $\mathfrak{T}_0 + \mathfrak{T}_1'$ *erzeugte Untergruppe von* $\mathfrak{A}$ *bzw.* $\mathfrak{B}$; *hierbei bedeuten* $\mathfrak{S}_1'$ *und* $\mathfrak{T}_1'$ *Teilsysteme der Systeme* $\mathfrak{S}_1$ *und* $\mathfrak{T}_1$. *Dann ist die aus den Systemen* $\mathfrak{S}_0\mathfrak{T}_0 + \mathfrak{S}_0\mathfrak{T}_1' + \mathfrak{S}_1'\mathfrak{T}_0$ *durch Bildung aller ganzen rationalen Funktionen erzeugte Gruppe* $\mathfrak{C}'$, *von der wir voraussetzen, daß sie als Gruppe der Restklassen eines endlichen Moduls aufgefaßt werden kann, zerlegbar, und zwar ist* $\mathfrak{C}' = \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$.

Offenbar sind $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ Untergruppen von $\mathfrak{C}'$. Es sei nun $\mathfrak{S}'$ ein ystem linear unabhängiger Größen in $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{T}'$ ein solches in $\mathfrak{B}'$. Dann nd die Größen von $\mathfrak{S}'\mathfrak{T}'$, weil $\mathfrak{A}'$ Untergruppe von $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{B}$, in $\mathfrak{C}$, also in $\mathfrak{C}'$ linear unabhängig. Ist speziell $\mathfrak{S}'$ eine Basis von ', $\mathfrak{T}'$ eine Basis von $\mathfrak{B}'$, so ist jede Größe von $\mathfrak{C}'$ durch $\mathfrak{S}'\mathfrak{T}'$ linear rstellbar. Denn betrachten wir irgendeine aus endlich vielen Größen r Systeme $\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1'$ und $\mathfrak{T}_0, \mathfrak{T}_1'$ gebildete ganze rationale Funktion. Diese nnen wir als eine Funktion aus den Systemen $\mathfrak{T}_0, \mathfrak{T}_1'$ mit Koeffizienten s $\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1'$ auffassen. Dann läßt sich jeder Koeffizient durch $\mathfrak{S}'$, jedes tenzprodukt durch $\mathfrak{T}'$ linear darstellen, also die ganze Funktion durch $'\mathfrak{T}'$. Daher ist nach Satz 19 in der Tat $\mathfrak{C}' = \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$; und nach Satz 20 nachträglich klar, daß auch $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ als Gruppen der Restklassen eines endlichen Moduls aufgefaßt werden können, weil beide eine den dingungen des Hilfssatzes VI genügende Basis besitzen.

Satz 33. *Jede Gruppe ist als Produkt von endlich vielen unzerlegbaren Gruppen darstellbar, wenn diese ebenso wie die gegebene Gruppe endlichen Moduln gehören.*

Nach Satz 26 ist die Mannigfaltigkeit jedes Faktors einer Gruppe chstens gleich der Mannigfaltigkeit dieser Gruppe, und zwar nur dann eich, wenn die Mannigfaltigkeit des anderen Faktors gleich Null, also nach tz 1 seine Ordnung endlich ist. Daher enthält jede Gruppe nur endlich viele ktoren der Ordnung unendlich. Aber auch Faktoren endlicher Ordnung

können nur in endlicher Anzahl vorkommen; denn nach Satz 28 ist di Dimension des Produktes gleich der Summe der Dimensionen der Faktoren Eine endliche Gruppe von der Dimension Null ist aber die aus den Vie fachen der Haupteinheit bestehende Einheitsgruppe, die natürlich nich als unzerlegbarer Faktor gerechnet wird.

§ 5.

Die primitiven vollen Hauptsysteme erster Dimension für zerlegbare Gruppen.

Im folgenden seien wieder stets $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Gruppen, die z endlichen Moduln gehören, und $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$.

Hilfssatz XI. *Es seien ε und η zwei Größen erster Dimension i $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ vom Grade ϱ und σ. Dann ist*

$$\zeta = \varepsilon + \eta + \{2\},$$

wobei $\{2\}$ eine beliebige Größe zweiter Stufe in $\mathfrak{C}$ bedeutet, eine Grö erster Dimension vom Grade $\varrho + \sigma$.

Nach Satz 30 sind ε und η von der ersten Dimension in $\mathfrak{C}$; fern sind diese Größen die Komponenten von $\varepsilon + \eta$ in bezug auf bestimm Stammgruppen. Daher hat $\varepsilon + \eta$ nach Hilfssatz X höchstens die D mension 1, also als Wurzelgröße genau diese Dimension. Nach Satz ist daher auch ζ von der ersten Dimension und nach Hilfssatz VII v demselben Grade wie $\varepsilon + \eta$. Nun ist aber

$$(\varepsilon + \eta)^{\varrho+\sigma} = \text{constans } \varepsilon^{\varrho}\eta^{\sigma} + \{\varrho + \sigma + 1\}$$

nach Satz 30 und Satz 9 von der Dimension $\varrho + \sigma$, dagegen

$$(\varepsilon + \eta)^{\varrho+\sigma+1} = \{\varrho + \sigma + 2\}.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Hilfssatz XII. *Ist ε eine Größe in $\mathfrak{A}$ von der ersten Dimensio und vom Grade ϱ, so haben auch die sämtlichen Größen erster Dimensio des Systems $\varepsilon\mathfrak{T}_0$ in $\mathfrak{C}$, wo $\mathfrak{T}_0$ ein volles Hauptsystem nullter D mension in $\mathfrak{B}$ ist, den Grad ϱ.*

Folgt aus Satz 30 und daraus, daß jede Potenz einer Größe von die Dimension 0 besitzt.

Satz 34. *Es sei $\mathfrak{T}_0$ eine Basis einer Stammgruppe $\mathfrak{B}_0$ von $\mathfrak{B}$, u $\mathfrak{S}_1$ ein primitives volles Hauptsystem erster Dimension in $\mathfrak{A}$. Da bilden die Größen $\mathfrak{S}_1\mathfrak{T}_0$ ein primitives volles Hauptsystem erster D mension in dem Produkte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0$.*

Nach Satz 29 bilden diese Größen ein volles Hauptsystem erst Dimension in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0$. Also haben wir nach Satz 18 nur noch zu beweise

aß eine lineare Verbindung der Größen von $\mathfrak{S}_1 \mathfrak{T}_0$ mindestens den gleichen rad hat wie jede darin mit einem von Null verschiedenen Koeffizienten nthaltene Größe. Es sei also

$$\zeta = \sum_{i,j} c_{ij} \varepsilon_i \mathfrak{y}_0^{(j)} = \sum_i \Big(\sum_j c_{ij} \mathfrak{y}_0^{(j)} \Big) \varepsilon_i$$

ne Größe erster Dimension in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0$, wobei c_{ij} beliebige feste Koeffizienten nd, von denen endliche viele von Null verschieden sind, ε_i die Größen on $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{y}_0^{(j)}$ die Größen von $\mathfrak{T}_0$ bedeuten. Wir können dann einen Index i_1 wählen, daß erstens ε_{i_1} einen möglichst großen Grad unter allen in ζ orkommenden ε_i besitzt, zweitens $\sum_j c_{i_1 j} \mathfrak{y}_0^{(j)}$ von Null verschieden, also, $\mathfrak{B}_0$ eine Stammgruppe ist, keine Wurzelgröße ist. Es gibt also eine ullstelle $\eta_1, \ldots, \eta_n$ von $\mathfrak{N}(y_1, \ldots, y_n)$, für die $d_{i_1} \neq 0$ ist, wenn wir

$$\sum_j c_{ij} g_j(\eta_1, \ldots, \eta_n) = d_i$$

tzen, wobei die Funktionen g_j durch

$$\mathfrak{y}_0^{(j)} = g_j(\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n)$$

stimmt sind. Dann ist die Größe

$$\sum_i d_i \varepsilon_i \tag{42}$$

$\mathfrak{A}$ nach Satz 16 mindestens vom Grade ϱ, wenn dies der Grad von ε_{i_1} , weil das System $\mathfrak{S}_1$ primitiv ist und ε_{i_1} mit einem von Null verschiedenen Koeffizienten vorkommt. Wäre nun

$$\zeta^\varrho = \{\varrho + 1\} \tag{43}$$

der Gruppe $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0$, wobei also die rechte Seite eine lineare Verbindung n Produkten von $(\varrho + 1)$ Wurzelgrößen in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0$ bedeutet, so wäre, falls r den Modul, als dessen Gruppe der Restklassen $\mathfrak{B}_0$ aufgefaßt werden nn, mit $\mathfrak{N}_0(y_1, \ldots, y_n)$ bezeichnen, eine der Gleichung (43) entsprechende ongruenz mod $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}_0)$ gültig. In diese setzen wir die Nullstelle $\eta_1, \ldots, \eta_n$ n $\mathfrak{N}_0$ ein. Dann steht aber rechter Hand eine lineare Verbindung von odukten von $(\varrho + 1)$ Funktionen von $x_1, \ldots, x_m$, die für alle Nullstellen n $\mathfrak{M}$ verschwinden, da ja die Wurzelgrößen von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0$ die Größen von $\mathfrak{B}_0$ sind, und die Kongruenz verwandelt sich in eine Kongruenz mod $\mathfrak{M}$, bedeutet, daß in der Gruppe $\mathfrak{A}$

$$\Big(\sum_i d_i \varepsilon_i \Big)^\varrho = \{\varrho + 1\}$$

im Widerspruch dazu, daß die Größe (42) mindestens vom Grade ϱ ist.

Satz 35. *Sind* $\mathfrak{S}_1$ *und* $\mathfrak{T}_1$ *zwei primitive volle Hauptsysteme erst Dimension in* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$, *ist ferner* $\mathfrak{S}_0$ *bzw.* $\mathfrak{T}_0$ *je eine Basis ein Stammgruppe* $\mathfrak{A}_0$ *bzw.* $\mathfrak{B}_0$, *so ist das System* $\mathfrak{S}_1\mathfrak{T}_0 + \mathfrak{S}_0\mathfrak{T}_1$ *ein primitiv volles Hauptsystem erster Dimension in* $\mathfrak{C}$.

Es sei ζ irgendeine lineare Verbindung der Größen dieses Systen Wir setzen

$$\zeta = \varepsilon + \eta,$$

wobei die $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0$-Komponente ε eine lineare Verbindung der Größen v $\mathfrak{S}_1\mathfrak{T}_0$, die $\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}$-Komponente η eine lineare Verbindung der Größen v $\mathfrak{S}_0\mathfrak{T}_1$ ist. Nach Satz 34 ist $\mathfrak{S}_1\mathfrak{T}_0$ primitiv in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{S}_0\mathfrak{T}_1$ primitiv $\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}$. Daher ist nach Satz 16 der Grad ϱ von ε nicht kleiner als d Grad einer beliebigen wirklich darin vorkommenden Größe von $\mathfrak{S}_1\mathfrak{T}$ ebenso ist der Grad σ von η nicht kleiner als der Grad einer beliebig wirklich darin vorkommenden Größe von $\mathfrak{S}_0\mathfrak{T}_1$. Andererseits ist na Hilfssatz XI der Grad τ von ζ gleich $\varrho + \sigma$, also

$$\tau \geqq \varrho, \quad \tau \geqq \sigma.$$

Daraus folgt aber nach Satz 18, daß das System primitiv ist.

Satz 36. *Es sei* $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ *ein primitives volles Hauptsystem ers Dimension* $\mathfrak{U}_1$ *in* $\mathfrak{C}$. *Dann läßt sich die Anordnung dieser Größen treffen, daß die* $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0$*-Komponenten des Systems* $\mathfrak{U}_1' = (\zeta_1, \zeta_3, \ldots)$ *e primitives volles Hauptsystem erster Dimension in* $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0$, *die* $\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}$*-Ko ponenten des Systems* $\mathfrak{U}_1'' = (\zeta_2, \zeta_4, \ldots)$ *ein primitives volles Hauptsyst erster Dimension in* $\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}$ *bilden, während die* $\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}$*-Komponenten v* $\mathfrak{U}_1'$ *und die* $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0$*-Komponenten von* $\mathfrak{U}_1''$ *zur zweiten Stufe gehören.*

Es seien $\tau_1, \ldots, \tau_\nu$ die Gradzahlen der Gruppe $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, und

$$\zeta_1, \zeta_2, \ldots \tag{44}$$

die Größen unseres primitiven Systems.

Wir betrachten alle Größen (44) vom Grade τ_1. Ihre Komponent können nach Hilfssatz XI keinen größeren Grad haben als τ_1; da die Zahl andererseits der kleinste überhaupt vorkommende Grad ist, so si die Gradzahlen der Komponenten, solange sie positiv sind, nicht klein also hat eine der Komponenten den Grad τ_1, die andere den Grad Die sämtlichen $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0$-Komponenten vom Grade τ_1 bilden alsdann, sow solche vorhanden sind, ein volles System vom Grade τ_1 in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0$. De erstens ist τ_1 der kleinste positive Grad dieser Gruppe, weil eine Grö kleineren Grades auch in $\mathfrak{C}$ kleineren Grad hätte. Ferner läßt sich je Größe des Grades τ_1 bis auf Größen zweiter Stufe linear durch Größen (44) vom Grade τ_1 ausdrücken, da diese hier ein volles Syst des Grades τ_1 bilden, also auch durch die $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0$-Komponenten dieser Größ Ebenso bilden die sämtlichen $\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}$-Komponenten vom Grade τ_1, sow

lche vorhanden sind, ein volles System vom Grade τ_1 in der Gruppe $\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}$. atürlich muß einer der beiden Fälle wirklich vorkommen.

Wir betrachten ferner die Größen (44) vom Grade τ_2, die zusammen it jenen vom Grade τ_1 ein volles System dieser Grade bilden. Jede rer Komponenten ist einerseits nach Hilfssatz XI vom Grade $\leqq \tau_2$, ndererseits aber, wenn der Grad positiv ist, von einem Grade $\geqq \tau_2$. enn der lineare Bestandteil mindestens einer der beiden Komponenten t von den entsprechenden linearen Bestandteilen der Komponenten der rößen (44) vom Grade τ_1 linear unabhängig, da sonst die ganze Größe is auf Größen zweiter Stufe durch die früheren Größen ausgedrückt erden könnte. Wäre nun der Grad dieser Komponente $< \tau_2$, so wäre e Gradzahl τ_2 nicht richtig gewählt, da ja die Komponente auch eine röße von $\mathfrak{C}$ ist. Daher ist also eine der Komponenten vom Grade τ_2, e andere vom Grade 0. Alle $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0$-Komponenten der Größen (44) von en Graden τ_1, τ_2, die selbst positiven Grades sind, bilden alsdann ein olles System ihrer Grade oder ihres Grades. In der Tat lassen sich alle rößen erster Dimension vom Grade $\leqq \tau_2$, die der Gruppe $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0$ angehören, s auf Größen zweiter Stufe durch die Größen (44) der Grade τ_1, τ_2 near ausdrücken, also auch durch die $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0$-Komponenten dieser Größen. ntsprechendes gilt für die $\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}$-Komponenten, deren Grade positiv sind.

Allgemein betrachten wir die Größen (44) der Grade $\tau_1, \ldots, \tau_\lambda$. Jede omponente der darin enthaltenen Größen vom Grade τ_λ ist, wenn die ehauptung bis zum Grade $\tau_{\lambda-1}$ schon bewiesen ist, einerseits nach Hilfstz XI vom Grade $\leqq \tau_\lambda$, andererseits ist dieser Grad, falls er positiv $\geqq \tau_\lambda$. Denn der lineare Bestandteil mindestens einer der beiden omponenten ist von den entsprechenden linearen Bestandteilen der Komnenten der Größen (44) der Grade $\tau_1, \ldots, \tau_{\lambda-1}$ linear unabhängig, weil nst die ganze Größe bis auf Größen zweiter Stufe durch die früheren near ausdrückbar wäre, da ja die Behauptung bis $\lambda - 1$ schon bewiesen, h. jede Größe im linearen Bestandteil einer ihrer Komponenten gleich . Wäre nun der Grad dieser Komponente $< \tau_\lambda$, so wäre τ_λ nicht richtig wählt. Daher ist der Grad für eine der beiden Komponenten Null, h. die Komponente ist von der zweiten Stufe, für die andere genau eich τ_λ. Alle $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0$-Komponenten der Größen (44) der Grade $\tau_1, \ldots, \tau_\lambda$, ren Grade positiv, bilden alsdann ein volles System ihrer Grade er ihres Grades. Denn jede Größe erster Dimension vom Grade $\leqq \tau_\lambda$, der Gruppe $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0$ angehört, läßt sich bis auf Größen zweiter Stufe rch die Größen (44) von den Graden $\tau_1, \ldots, \tau_\lambda$ linear ausdrücken, also ch durch die $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0$-Komponenten dieser Größen. Entsprechendes gilt für $\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}$-Komponenten, deren Grade positiv sind.

Hiermit ist Satz 36 vollständig bewiesen.

§ 6.

Die homogenen Gruppen.

Definition IX. *Eine Gruppe heißt homogen, wenn es in ihr ei volles Hauptsystem nullter Dimension* $\mathfrak{x}_0', \mathfrak{x}_0'', \ldots$ *und, falls überhau Wurzelgrößen* $\neq 0$ *vorhanden sind, ein volles Hauptsystem erster D mension* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ *von der Eigenschaft gibt, daß jedes Produ* $\varepsilon_1^{\beta_1}\varepsilon_2^{\beta_2}\ldots\mathfrak{x}_0'^{\gamma'}\mathfrak{x}_0''^{\gamma''}\ldots$, *dargestellt durch eine beliebige nach Satz* 14 *a beiden Systemen erzeugte Hauptbasis, eine lineare Verbindung von solch Größen ist, deren Dimension gleich* $\beta_1+\beta_2+\ldots$ *ist. Wir sprechen dan von einem homogenen vollen Hauptsystem nullter und erster Dimensio und einer homogenen Hauptbasis der Gruppe.*

Daß es homogene Gruppen gibt, ist im Falle endlicher Ordnung a den einfachsten Beispielen ersichtlich; eine unendliche homogene Grupp ist z. B. jede unendliche Stammgruppe und jede durch Multiplikation ein Stammgruppe mit einer endlichen homogenen Gruppe entstehende Grupp (vgl. z. B. Anmerkung [16]).

Die Bedingung der Homogenität ist dann und nur dann erfüllt, wen jede lineare Verbindung von Produkten

$$\varepsilon_1^{\beta_1}\varepsilon_2^{\beta_2}\ldots\mathfrak{x}_0'^{\gamma'}\mathfrak{x}_0''^{\gamma''}, \tag{45}$$

die die gleiche Anzahl β von Faktoren $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ enthalten, entweder v der Dimension β ist oder verschwindet. Die Notwendigkeit dieser B dingung ergibt sich unmittelbar aus der Definition, ist übrigens für $\beta=$ für jede Gruppe erfüllt, falls man für $\mathfrak{x}_0', \mathfrak{x}_0'', \ldots$ eine Basis einer Stamm gruppe $\mathfrak{A}_0$ der gegebenen Gruppe $\mathfrak{A}$ wählt. Daß die Bedingung auch hi reicht, folgt so: Drücken wir irgendein Produkt (45), das $\beta>0$ Faktor $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ enthält, durch eine Hauptbasis $\varepsilon_1^{\alpha_1}\varepsilon_2^{\alpha_2}\ldots, \ldots$ aus, so entste eine Gleichung der Form

$$\varepsilon_1^{\beta_1}\varepsilon_2^{\beta_2}\ldots\mathfrak{x}_0'^{\gamma'}\mathfrak{x}_0''^{\gamma''}\ldots=\sum c_{\alpha_1\alpha_2\ldots}\varepsilon_1^{\alpha_1}\varepsilon_2^{\alpha_2}\ldots+\{\beta+1\}\quad(\alpha_1+\alpha_2+\ldots=\beta$$

Hieraus folgt nach unserer Annahme

$$\varepsilon_1^{\beta_1}\varepsilon_2^{\beta_2}\ldots\mathfrak{x}_0'^{\gamma'}\mathfrak{x}_0''^{\gamma''}\ldots-\sum c_{\alpha_1\alpha_2}\ldots\varepsilon_1^{\alpha_1}\varepsilon_2^{\alpha_2}\ldots=0,$$

da links eine lineare Verbindung von Produkten steht, die die gleic Anzahl β von Faktoren $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ enthalten. Diese Darstellung gilt natü lich auch, wenn das gegebene Produkt selbst verschwindet. Genau eben findet man für $\beta=0$

$$\mathfrak{x}_0'^{\gamma'}\mathfrak{x}_0''^{\gamma''}\ldots=\sum_i c_i\mathfrak{x}_0^{(i)}.$$

Diese Gleichung zeigt, daß jedes homogene volle Hauptsystem nullter Dimension eine Basis einer Stammgruppe $\mathfrak{A}_0$ von $\mathfrak{A}$ ist; umgekehrt braucht natürlich eine solche Basis nicht notwendig ein homogenes volles Hauptsystem nullter Dimension zu sein.

Unsere Behauptung ist damit bewiesen. Ferner ist klar, daß jedes aus einem homogenen vollen Hauptsystem nullter Dimension durch Bildung linearer Verbindungen hervorgehende volle Hauptsystem nullter Dimension wieder homogen ist, und daß Entsprechendes bezüglich der homogenen vollen Hauptsysteme erster Dimension gilt.

Satz 37. *In jeder homogenen Gruppe gibt es ein primitives homogenes volles Hauptsystem erster Dimension.*

Es sei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ ein homogenes volles Hauptsystem erster Dimension in $\mathfrak{A}$, ferner sei

$$\begin{aligned} \varepsilon_1' &= a_{11}\varepsilon_1 + a_{12}\varepsilon_1 + \ldots + \{2\} = \varepsilon_1'' + \{2\} \\ \varepsilon_2' &= a_{21}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_1 + \ldots + \{2\} = \varepsilon_2'' + \{2\} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ein primitives volles Hauptsystem erster Dimension, ausgedrückt durch das System $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, wobei

$$\varepsilon_i'' = a_{i1}\varepsilon_1 + a_{i2}\varepsilon_2 + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

gesetzt ist. Dann bilden nach Satz 17 auch diese Größen ein primitives volles Hauptsystem erster Dimension, das andererseits homogen ist, also ein System mit den im Satz verlangten Eigenschaften.

Satz 38. *In jeder homogenen Gruppe $\mathfrak{A}$ gibt es ein homogenes volles Hauptsystem nullter Dimension, das als Basis einer Stammgruppe von $\mathfrak{A}$ den Bedingungen des Hilfssatzes VI genügt.*

Es sei $\mathfrak{x}_0', \mathfrak{x}_0'', \ldots$ ein homogenes volles Hauptsystem nullter Dimension, $\mathfrak{y}_0', \mathfrak{y}_0'', \ldots$ ein den Bedingungen des Hilfssatzes VI genügendes volles Hauptsystem nullter Dimension. Dann bestehen Gleichungen der Form

$$\mathfrak{y}_0^{(i)} = \sum_k a_{ik}\mathfrak{x}_0^{(k)} + \{1\} \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

wobei die Größen

$$\mathfrak{z}_0^{(i)} = \sum_k a_{ik}\mathfrak{x}_0^{(k)} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

selbst ein homogenes volles Hauptsystem nullter Dimension bilden. Außerdem sind sie wegen

$$\mathfrak{y}_0^{(i)} = \mathfrak{z}_0^{(i)} + \{1\} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

mit den Größen $\mathfrak{y}_0^{(i)}$ isomorph, erfüllen also ebenfalls die Bedingungen des Hilfssatzes VI.

Satz 39. *Ist das Produkt einer endlichen Gruppe $\mathfrak{A}$ mit einer Stammgruppe $\mathfrak{B}_0$ homogen, so ist die Gruppe $\mathfrak{A}$ homogen.*

Es sei $\mathfrak{T}_0 = (\mathfrak{y}_0', \mathfrak{y}_0'', \ldots)$ eine Basis von $\mathfrak{B}_0$, die den Bedingungen des Hilfssatzes VI genügt. Ferner sei $\mathfrak{S}_1 = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$ ein volles Hauptsystem erster Dimension in der Gruppe $\mathfrak{A}$. Dann bildet nach Satz 2 das System $\mathfrak{T}_0 \mathfrak{S}_1$ ein volles Hauptsystem erster Dimension in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0$. Ausgehend von einem beliebigen homogenen vollen Hauptsystem erster Dimension in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0$ können wir dann durch Bildung von linearen Verbindungen zu einem ebenfalls homogenen vollen Hauptsystem erster Dimension $\mathfrak{U}_1 = (\zeta_{ij})$ in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0$ gelangen, so daß

$$\zeta_{ij} = \varepsilon_i \mathfrak{y}_0^{(j)} + \{2\} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, \\ j = 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$$

ist. Betrachten wir hierin die $\mathfrak{A}$-Komponenten der Größen

$$\begin{aligned} \zeta_{i1} &= \varepsilon_i + \{2\} \\ &= \varepsilon_i' + \{2\} \end{aligned} \qquad (i = 1, \ldots, r \tag{46}$$

die wir mit ε_i' bezeichnen, so bilden diese Größen notwendig ein volles Hauptsystem erster Dimension in $\mathfrak{A}$. Dies System $\mathfrak{S}_1'$ ist homogen. Um das einzusehen, bilden wir aus ihm und der Haupteinheit irgendeine Hauptbasis von $\mathfrak{A}$ und drücken ein beliebiges nicht zu der Hauptbasis gehörendes Produkt der Größen von $\mathfrak{S}_1'$ durch die Hauptbasis aus. Aus den Gleichungen (46), in denen wir die Größen zweiter Stufe durch das System $\mathfrak{U}_1$ ganz rational ausgedrückt denken, ergibt sich eine Darstellung von ε_i' durch die Größen von $\mathfrak{U}_1$. Setzen wir diesen Wert für ε_i' in unseren Ausdruck des gegebenen Produktes durch die Hauptbasis ein, so erhalten wir eine zunächst inhomogene Beziehung zwischen den Größen von $\mathfrak{U}_1$, in der wir also wegen der vorausgesetzten Homogenität von $\mathfrak{A}$ die Glieder, die die kleinste Anzahl von Faktoren ζ_{ij} enthalten, alle gleich Null setzen können, wodurch wir zu einer Beziehung zwischen den Produkten von ζ_{i1} allein gelangen. Da nun die Größen ε_i' die $\mathfrak{A}$-Komponenten von ζ_{i1} sind, so ergibt die nochmalige Anwendung der ursprünglichen Gleichungen (46) unsere alte Beziehung zurück, aber jetzt ohne die Glieder höherer Dimension, so daß also das gegebene Produkt als lineare Verbindung von solchen Größen der Hauptbasis erscheint, die dieselbe Anzahl von Faktoren ε_i' enthalten. Damit ist die Homogenität des Systems $\mathfrak{S}_1'$, also der Gruppe $\mathfrak{A}$ bewiesen.

Satz 40. *Das Produkt zweier homogener Gruppen ist eine homogene Gruppe. Ist umgekehrt $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ eine homogene Gruppe, und ist $\mathfrak{A}$ von endlicher Ordnung, so sind die Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ homogen.*

Ist $\mathfrak{S}_0$ und $\mathfrak{S}_1$ bzw. $\mathfrak{T}_0$ und $\mathfrak{T}_1$ je ein homogenes volles Hauptsystem nullter und erster Dimension in $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$, so bilden die Systeme

$$\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{S}_0 \mathfrak{T}_0$$
$$\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{S}_0 \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{S}_1 \mathfrak{T}_0$$

in homogenes volles Hauptsystem nullter und erster Dimension in $\mathfrak{C}$. Denn erstens ist $\mathfrak{U}_0$ die Basis einer Stammgruppe von $\mathfrak{C}$ (Satz 25); weitens ist jedes Produkt, das außer Faktoren von $\mathfrak{S}_0$ und $\mathfrak{T}_0$ etwa Faktoren aus $\mathfrak{S}_1$ und β Faktoren aus $\mathfrak{T}_1$ enthält, wo α und β nicht eide Null sind, als lineare Verbindung von Größen von $\mathfrak{S}_\alpha \mathfrak{T}_\beta$ darstellar, wobei $\mathfrak{S}_\alpha$ ein aus $\mathfrak{S}_1$ erzeugtes volles Hauptsystem α-ter Dimension, $_\beta$ ein aus $\mathfrak{T}_1$ erzeugtes volles Hauptsystem β-ter Dimension ist.

Sei andererseits die Gruppe $\mathfrak{C}$ homogen und $\mathfrak{A}$ von endlicher Ordung. Wir wählen dann nach Satz 38 ein homogenes volles Hauptsystem ullter Dimension $\mathfrak{U}_0 = (\mathfrak{z}_0', \mathfrak{z}_0'', \ldots)$, und nach Satz 37 ein primitives omogenes volles Hauptsystem erster Dimension $\mathfrak{U}_1 = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots)$ in $\mathfrak{C}$. erner legen wir irgendeine gemäß Hilfssatz VI gewählte Basis in $\mathfrak{A}$ zurunde und bezeichnen die nach § 4 dadurch bestimmte $\mathfrak{B}$-Komponente on $\mathfrak{z}_0^{(i)}$ mit $\mathfrak{y}_0^{(i)}$, so daß die Gleichungen

$$\mathfrak{z}_0^{(i)} = \mathfrak{y}_0^{(i)} + \{1\} \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{47}$$

estehen, Dann ist das System $\mathfrak{T}_0 = (\mathfrak{y}_0', \mathfrak{y}_0'', \ldots)$ eine Basis einer Stammruppe $\mathfrak{B}_0$ von $\mathfrak{B}$, die nach Satz 5 zu der durch $\mathfrak{U}_0$ erzeugten Stammruppe isomorph ist. Ferner läßt sich nach Satz 36 die Anordnung der rößen von $\mathfrak{U}_1$ so treffen, daß die $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0$-Komponenten des Systems $_1' = (\zeta_1, \zeta_3, \ldots)$ ein primitives volles Hauptsystem erster Dimension in $\mathfrak{B}_0$, die $\mathfrak{B}$-Komponenten[24]) des Systems $\mathfrak{U}_1'' = (\zeta_2, \zeta_4, \ldots)$ ein primitives olles Hauptsystem erster Dimension in $\mathfrak{B}$ bilden, während die $\mathfrak{B}$-Komponenten von $\mathfrak{U}_1'$ und die $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0$-Komponenten von $\mathfrak{U}_1''$ zur zweiten Stufe ehören. Insbesondere bestehen daher Gleichungen der Form

$$\zeta_{2i} = \eta_i + \{2\} \qquad (i = 1, 2, \ldots), \tag{48}$$

o die Größen $\mathfrak{T}_1 = (\eta_1, \eta_2, \ldots)$ ein primitives volles Hauptsystem erster imension in $\mathfrak{B}$ bilden und die $\mathfrak{B}$-Komponenten von $(\zeta_2, \zeta_4, \ldots)$ sind.

Wir bilden nun eine beliebige Hauptbasis der Gruppe $\mathfrak{B}$ aus den ystemen $\mathfrak{T}_0$ und $\mathfrak{T}_1$ nach Satz 14, und drücken ein beliebiges nicht zu r gehörendes Produkt $\mathfrak{y}$ der Größen von $\mathfrak{T}_0$ und $\mathfrak{T}_1$ durch sie aus. Ist von der α-ten Dimension, so wird der Ausdruck mit gewissen Größen ter Dimension dieser Hauptbasis, d. h. mit Produkten beginnen, die nau α Faktoren aus $\mathfrak{T}_1$ enthalten. Nun drücken wir in den Gleichungen 47) und (48), die wir nach den Größen $\mathfrak{y}_0^{(i)}$ und η_i auflösen, die Größen

[24]) Weil $\mathfrak{A}$ von endlicher Ordnung ist, stimmen die $\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}$-Komponenten überein t den $\mathfrak{B}$-Komponenten im Sinne von S. 247 für irgendeine den Bedingungen von lfssatz VI genügende Basis von $\mathfrak{A}$.

erster bzw. zweiter Stufe durch die Größen von $\mathfrak{U}_1$ aus und setzen dies Werte in unsern Ausdruck des gegebenen Produktes durch die Hauptbas ein. Dadurch erhalten wir eine Formel für das dem Produkte $\mathfrak{y}$ ent sprechende Produkt $\mathfrak{z}$ von Größen von $\mathfrak{U}_0$ und $\mathfrak{U}_1''$ durch gewisse Produkt aus $\mathfrak{U}_0$ und $\mathfrak{U}_1$, das mit Gliedern α-ter Dimension beginnt, die aus de Systemen $\mathfrak{U}_0$ und $\mathfrak{U}_1''$ gebildet sind. Wegen der Homogenität der System $\mathfrak{U}_0$ und $\mathfrak{U}_1$ darf man hierin die Glieder höherer Dimension fortlassen; di Größe $\mathfrak{z}$ drückt sich daher durch die Systeme $\mathfrak{U}_0$ und $\mathfrak{U}_1''$ allein aus, un zwar vermöge derselben Koeffizienten wie die Größe $\mathfrak{y}$ durch die ent sprechenden Größen aus $\mathfrak{T}_0$ und $\mathfrak{T}_1$. Setzt man nämlich rückwärts di Ausdrücke (47) und (48) wieder ein, so ergibt sich derselbe Ausdruc für $\mathfrak{y}$, aber ohne die Glieder $(\alpha+1)$-ter Stufe, von dem wir ausginge Also ist die Gruppe $\mathfrak{B}$ homogen. Ferner ist die aus $\mathfrak{U}_0+\mathfrak{U}_1''$ erzeugt Gruppe $\mathfrak{C}''$ zu $\mathfrak{B}$ isomorph, wie zugleich aus dieser Überlegung folg Denn weil $\mathfrak{y}_0^{(i)}$ bzw. η_i die $\mathfrak{B}$-Komponenten der Größen (47) und (48 sind, folgt auch umgekehrt aus jeder Beziehung zwischen den Größen vo $\mathfrak{U}_0+\mathfrak{U}_1''$ die entsprechende Beziehung zwischen den Größen von $\mathfrak{T}_0+\mathfrak{T}_1$

Genau ebenso beweist man nun die Homogenität der Gruppe $\mathfrak{AB}$ und ihre Isomorphie mit der aus $\mathfrak{U}_0+\mathfrak{U}_1'$ erzeugten Gruppe $\mathfrak{C}'$. Au Satz 39 folgt dann, daß auch die Gruppe $\mathfrak{A}$ selbst homogen ist. Zugleic hat sich folgender Satz ergeben:

Satz 41. *Ist die homogene Gruppe* $\mathfrak{C}=\mathfrak{AB}$ *und ist* $\mathfrak{A}$ *von end licher Ordnung, so ist (in den Bezeichnungen von Satz* 36*) die aus* $\mathfrak{U}_0+\mathfrak{U}$ *erzeugte Gruppe* $\mathfrak{C}'$ *zu* $\mathfrak{AB}_0$ *isomorph, die aus* $\mathfrak{U}_0+\mathfrak{U}_1''$ *erzeugte Gruppe* $\mathfrak{C}$ *zu* $\mathfrak{B}$ *isomorph.*

Satz 42. *Es seien* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{C}$ *Gruppen endlicher Ordnung,* $\mathfrak{B}_0$ *und* $\mathfrak{T}$ *Stammgruppen, und es sei* $\mathfrak{AB}_0$ *isomorph zu* $\mathfrak{CD}_0$. *Dann ist* $\mathfrak{B}_0$ *isomorph zu* $\mathfrak{D}_0$, $\mathfrak{A}$ *isomorph zu* $\mathfrak{C}$.

Zum Beweise genügt offenbar die Annahme $\mathfrak{AB}_0=\mathfrak{C}\mathfrak{D}_0$. Der erst Teil der Behauptung ist nach Satz 25 und Satz 5 klar. Zum Beweis der zweiten Behauptung gehen wir aus von der Gruppe $\mathfrak{CD}_0$. Es gib darin ein volles Hauptsystem nullter Dimension, das zugleich eine Bas von $\mathfrak{D}_0$ ist, die den Bedingungen von Hilfssatz VI genügt. Die Größe dieses Systems $\mathfrak{V}_0$ seien $\mathfrak{t}_0', \mathfrak{t}_0'', \ldots$. Vermöge der Gleichungen

$$\mathfrak{t}_0^{(i)}=\mathfrak{y}_0^{(i)}+\{1\} \qquad (i=1, 2, \ldots \tag{49}$$

in denen die Größen $\mathfrak{y}_0^{(i)}$ die $\mathfrak{B}_0$-Komponenten bedeuten (gebildet mittel einer beliebigen gemäß Hilfssatz VI gewählten Basis $\mathfrak{S}'$ von $\mathfrak{A}$, dere speziellere Auswahl noch vorbehalten werden kann), gelangen wir zu eine vollen Hauptsystem nullter Dimension $\mathfrak{T}_0=(\mathfrak{y}_0', \mathfrak{y}_0'', \ldots)$ in $\mathfrak{B}_0$, das wege seiner Isomorphie zu $\mathfrak{V}_0$ ebenfalls den Bedingungen von Hilfssatz VI g

nügt. Es sei ferner $\mathfrak{U}_1$ ein volles Hauptsystem erster Dimension in $\mathfrak{C}$, dessen $\mathfrak{A}$-Komponenten inbezug auf das System $\mathfrak{T}_0$ von $\mathfrak{B}_0$ wir mit $\mathfrak{S}_1$ bezeichnen. Dann bilden nach Satz 29 die Größen des Systems $\mathfrak{U}_1\mathfrak{B}_0$ ein volles Hauptsystem erster Dimension in der Gruppe $\mathfrak{C}\mathfrak{D}_0$, in dem die Größen des Systems $\mathfrak{U}_1$ selbst enthalten sind. Die Bestandteile erster Dimension in den Ausdrücken von $\mathfrak{U}_1\mathfrak{B}_0$ durch die Basis $\mathfrak{S}'\mathfrak{T}_0$ bilden alsdann ebenfalls ein volles Hauptsystem erster Dimension in $\mathfrak{C}\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{A}\mathfrak{B}_0$, durch deren $\mathfrak{A}$-Komponenten sich also jede Größe erster Dimension von $\mathfrak{A}$ als auf Größen zweiter Stufe darstellen läßt. Wegen der speziellen Eigenschaft von $\mathfrak{T}_0$ gehören aber in den Ausdrücken von $\mathfrak{U}_1\mathfrak{B}_0$, abgesehen von etwaigen Größen höherer Dimension, nur die Größen von $\mathfrak{S}_1$ der Gruppe $\mathfrak{C}$ allein an, so daß sich also aus diesen ein volles Hauptsystem erster Dimension in $\mathfrak{A}$ auswählen läßt, insbesondere also nach Satz 14 jede Größe einer Dimension $\geqq 1$ durch $\mathfrak{S}_1$ ganz rational darstellbar ist. Ordnen wir daher jeder Größe von $\mathfrak{C}$ ihre $\mathfrak{A}$-Komponente zu, so kommt bei dieser Zuordnung auch jede Größe von $\mathfrak{A}$ wirklich vor. Da ferner aus jeder Beziehung zwischen Größen von $\mathfrak{C}$ dieselbe Beziehung zwischen den $\mathfrak{A}$-Komponenten folgt, so kann die Ordnung der Gruppe $\mathfrak{A}$ nicht größer sein als die Ordnung von $\mathfrak{C}$, und falls beide Ordnungen einander gleich sind, sind die Gruppen isomorph. Nun können wir aber die ganze Betrachtung umkehren, da die beiden Gruppen in den Voraussetzungen des Satzes völlig symmetrisch auftreten, womit die Behauptung bewiesen ist.

Satz 43. *Ist eine homogene Gruppe $\mathfrak{G}$ auf zwei Arten als Produkt*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{C}\mathfrak{D}$$

dargestellt, wobei $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ von endlicher Ordnung, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ von unendlicher Ordnung und durch keine Gruppe endlicher Ordnung teilbar sind, so ist $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$ zu $\mathfrak{D}$ isomorph. Alle Gruppen sollen dabei zu endlichen Moduln gehören.

In derselben Weise, wie beim Beweise von Satz 42 bilden wir zwei volle Hauptsysteme nullter Dimension $\mathfrak{B}_0 = (\mathfrak{t}_0', \mathfrak{t}_0'', \ldots)$ in $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}_0 = (\mathfrak{y}_0', \mathfrak{y}_0'', \ldots)$ in $\mathfrak{B}$, deren Größen durch die Gleichungen (49) verbunden sind, und wobei die Größen $\mathfrak{y}_0^{(i)}$ die $\mathfrak{B}$-Komponenten der Größen $\mathfrak{t}_0^{(i)}$ sind. Es soll aber jetzt $\mathfrak{B}_0$ ein *homogenes* System sein, das den Bedingungen des Hilfssatzes VI genügt. Ein solches gibt es nach Satz 38, nach Satz 40 die Gruppe $\mathfrak{D}$ homogen ist.

Es sei ferner $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{V}_1$ je ein primitives homogenes volles Hauptsystem erster Dimension in $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$, das dort nach Satz 37 existiert, weil auch die Gruppe $\mathfrak{C}$ nach Satz 40 homogen ist. Dann bilden nach Satz 35 und dem Beweise des ersten Teils von Satz 40 die Größen des

Systems $\mathfrak{U}_1\mathfrak{V}_0 + \mathfrak{V}_1$ ein primitives homogenes volles Hauptsystem erste Dimension in $\mathfrak{G}$. Diese Größen haben ferner nach Satz 36 zum eine Teil $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0$-Komponenten, die ein primitives volles Hauptsystem erste Dimension $\mathfrak{S}_1'$ in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0$ bilden; das so bestimmte Teilsystem von $\mathfrak{U}_1\mathfrak{V}_0$ be zeichnen wir mit $\mathfrak{U}_1'$, dasjenige von $\mathfrak{V}_1$ mit $\mathfrak{V}_1'$. Die übrigen Größen deren Systeme wir respektive mit $\mathfrak{U}_1''$ bzw. $\mathfrak{V}_1''$ bezeichnen, besitzen solch $\mathfrak{B}$-Komponenten, die ein primitives homogenes volles Hauptsystem erste Dimension $\mathfrak{T}_1$ in $\mathfrak{B}$ bilden. Es ist dann also

$$\mathfrak{U}_1\mathfrak{V}_0 = \mathfrak{U}_1' + \mathfrak{U}_1'',$$
$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_1' + \mathfrak{B}_1''.$$

Nun ist nach Satz 41 die aus den Systemen $\mathfrak{V}_0$ und $\mathfrak{U}_1'' + \mathfrak{V}_1''$ erzeugt Gruppe zu $\mathfrak{B}$ isomorph, insbesondere ist $\mathfrak{T}_0$ ein homogenes volles Haup system nullter Dimension, das den Bedingungen von Hilfssatz VI genüg Andererseits bedenken wir folgendes. Da $\mathfrak{V}_0$ den Bedingungen von Hilf satz VI genügt, insbesondere also die Haupteinheit enthält, so komme in dem System $\mathfrak{U}_1\mathfrak{V}_0$ die Größen von $\mathfrak{U}_1$ selbst vor; diese werden tei in $\mathfrak{U}_1'$, teils in $\mathfrak{U}_1''$ enthalten sein. Ist $\overline{\mathfrak{U}}_1'$ bzw. $\overline{\mathfrak{U}}_1''$ das Teilsystem vo $\mathfrak{U}_1$, das in $\mathfrak{U}_1'$ bzw. $\mathfrak{U}_1''$ vorkommt, so sind die Größen des Systems $\overline{\mathfrak{U}}_1'\mathfrak{V}$ mtlich ebenfalls in $\mathfrak{U}_1'$, des Systems $\overline{\mathfrak{U}}_1''\mathfrak{V}_0$ sämtlich ebenfalls in $\mathfrak{U}_1''$ en halten, da sie in $\mathfrak{U}_1\mathfrak{V}_0$ vorkommen und die $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0$-Komponenten vo $\overline{\mathfrak{U}}_1''\mathfrak{V}_0$, die $\mathfrak{B}$-Komponenten von $\overline{\mathfrak{U}}_1'\mathfrak{V}_0$ nach Hilfssatz VIII gewiß von d zweiten Stufe sind. Andererseits sind mit $\overline{\mathfrak{U}}_1'\mathfrak{V}_0$ und $\overline{\mathfrak{U}}_1''\mathfrak{V}_0$ alle Größ von $\mathfrak{U}_1\mathfrak{V}_0$ erschöpft. Also ist

$$\mathfrak{U}_1' = \overline{\mathfrak{U}}_1'\mathfrak{V}_0,$$
$$\mathfrak{U}_1'' = \overline{\mathfrak{U}}_1''\mathfrak{V}_0.$$

Unsere zu $\mathfrak{B}$ isomorphe Gruppe kann hiernach aus den Systemen $\mathfrak{V}_0$ u $\overline{\mathfrak{U}}_1''\mathfrak{V}_0 + \mathfrak{V}_1''$ erzeugt gedacht werden; andererseits ist nach Satz 20 und daher auch die Gruppe selbst zu einem endlichen Modul gehöri Nach Satz 32 ist sie daher das Produkt der beiden aus $(1 + \overline{\mathfrak{U}}_1'')$ u $\mathfrak{V}_0 + \mathfrak{V}_1''$ erzeugten Gruppen. Daher müßte auch $\mathfrak{B}$ zerlegbar sein in zw zu den genannten Gruppen isomorphe Gruppen; es war aber vorausgeset daß $\mathfrak{B}$ keine endliche Gruppe als Faktor enthalten sollte. Es ist dah $\overline{\mathfrak{U}}_1'' = 0$, und $\mathfrak{B}$ ist isomorph zu der aus $\mathfrak{V}_0 + \mathfrak{V}_1''$ erzeugten Gruppe.

In derselben Weise ist nach Satz 41 die aus den Systemen $\mathfrak{V}_0$ u $\overline{\mathfrak{U}}_1' + \mathfrak{V}_1'$ erzeugte Gruppe zu $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0$ isomorph.

Wir kehren nunmehr die ganze Überlegung um, indem wir ausgeh von den Systemen $\mathfrak{T}_0$, $\mathfrak{T}_1$ und einem beliebigen primitiven homogenen voll Hauptsystem erster Dimension $\mathfrak{S}_1$ der nach Satz 40 homogenen Gruppe In dem so gebildeten primitiven homogenen vollen Hauptsystem erst

Dimension $\mathfrak{S}_1\mathfrak{T}_0 + \mathfrak{T}_1$ von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ betrachten wir nach Satz 36 die $\mathfrak{C}\mathfrak{D}_0$- und D-Komponenten. Aus unseren früheren Gleichungen ergibt sich durch Umkehrung, daß *alle* Größen von $\mathfrak{T}_1$ zu den Größen gehören, deren D-Komponenten von der ersten Dimension sind. Andererseits ist $\mathfrak{T}_1$ etzt bis auf Größen zweiter Stufe durch die Größen eines *vollen* Hauptystems erster Dimension von $\mathfrak{D}$ dargestellt; daher ist auch $\mathfrak{B}_1''$ ein solches ystem, und dies zeigt, daß $\mathfrak{B}$ isomorph ist zu $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0$ isomorph zu $\mathfrak{D}_0$. Nach Satz 42 folgt hieraus dann auch die Isomorphie von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$.

Satz 44. *Es sei $\mathfrak{A}$ eine homogene Gruppe, deren Stammgruppe nzerlegbar ist. Ist dann $\mathfrak{A}$ auf zwei Arten als Produkt von unzerlegaren Gruppen dargestellt, so stimmt die Anzahl der Faktoren in beiden erlegungen überein, und jeder Faktor der einen Zerlegung ist einem aktor der anderen Zerlegung isomorph, falls alle vorkommenden Gruppen endlichen Moduln gehören.*

Nach Satz 25 kann die Gruppe bei jeder der beiden Zerlegungen, lls sie nicht endlich ist, nur genau einen Faktor unendlicher Ordnung nthalten. Diese beiden Faktoren sind alsdann nach Satz 43 zueinander omorph, ebenso die Produkte der Faktoren endlicher Ordnung in den eiden Zerlegungen. Diese nach Satz 40 homogenen endlichen Gruppen nd nun, wie ich in meiner Dissertation gezeigt habe und außerdem aus en Entwicklungen des vorliegenden Paragraphen leicht abzuleiten ist, im esentlichen, d. h. abgesehen von der Isomorphie, eindeutig in unzerlegare Faktoren zerlegbar, womit die Behauptung bewiesen ist.

Satz 45. *Es sei $\mathfrak{A}$ eine homogene Gruppe der Mannigfaltigkeit* 1. *t dann $\mathfrak{A}$ auf zwei Arten als Produkt von unzerlegbaren Gruppen darstellt, so stimmt die Anzahl der Faktoren in beiden Zerlegungen überein, und jeder Faktor der einen Zerlegung ist einem Faktor der andern erlegung isomorph, falls alle vorkommenden Gruppen zu endlichen oduln gehören.*

Folgt aus Satz 26 und Satz 44.

Göttingen, den 28. Januar 1919.

(Eingegangen am 13. März 1919.)

Über die Wendepunktstangenten der Raumkurve vierter Ordnung erster Art.

Von

Hans Mohrmann in Basel.

Herrn Professor Dr. Aurel Voss
zu seinem fünfzigjährigen Doktorjubiläum
am 17. März 1919 gewidmet.

Inhalt.

Einleitung.

I. Kluyversche Quadrupel von Wendepunktstangenten der $R^4_{p=$

II. Die Kollineationsinvarianten der Kluyverschen Quadrupel erst
und zweiter Art.

III. Kollinearität Kluyverscher Quadrupel einer $R^4_{p=1}$ mit gegeb
nem charakteristischen Doppelverhältnis (Modul).

IV. Zu einem Kluyverschen Quadrupel gehörige Scharen von $R^4_{p=$

V. Die Kluyverschen Linienkomplexe und ihre Abbildung.

Einleitung.

Sechs Punkte allgemeiner Lage im Raum bestimmen eine gewunde
Kurve dritter Ordnung. Ihre Konstantenzahl beträgt mithin 12. S
eine gewundene Kurve eine Gerade im Raum berühren, so wird ihr ei
dreifache Bedingung auferlegt. Gleichwohl sind vier gerade Linien a
gemeiner Lage, wie Herr Voss[1]) zuerst bemerkt hat, nicht Tangent
einer Raumkurve dritter Ordnung. Bilden vier gerade Linien ein solch
Tangentenquadrupel, so besteht eine projektiv-invariante Beziehung zwisch

[1]) Über vier Tangenten einer Raumcurve 3. Ordnung, Math. Ann. Bd.
(1878), S. 168—174.

hnen und es existiert sogleich eine ganze Schar von ∞^1 R^3. Sie gehen us einer unter ihnen vermöge der kollinearen Umformungen des Raumes ervor, die mit den linearen Komplexen des Büschels verbunden sind, as durch die vier Geraden bestimmt ist.

Sind drei der Geraden fest gegeben, während man die vierte als ariabel betrachtet, so ist der Ort dieser vierten Tangenten von R^3 ein Komplex vierten Grades. Dieser *Vosssche Komplex* ist unter anderem adurch ausgezeichnet, daß er eine (aus drei linearen Kongruenzen betehende) *Selbstdurchdringung* besitzt. Es gibt daher, wie Herr Study[2]) uerst bemerkt hat, Quadrupel von geraden Linien im Raum, die von wei Scharen von je ∞^1 Kurven dritter Ordnung berührt werden. Die rage nach den Scharen irreduzibler R^3, die vier einander nicht schneidende erade Linien berühren, hat demnach 0, 1 oder 2 Lösungen.

Interessanter noch liegen die Verhältnisse bei einer mit den Raumurven vierter Ordnung erster Art zusammenhängenden verwandten Konguration, die, angeregt durch die genannten Untersuchungen von Herrn oss, zuerst Herr J. C. Kluyver[3]) betrachtet hat. Obwohl eine gewunene Kurve vierter Ordnung erster Art von 16 Konstanten abhängt und man r (nur) eine vierfache Bedingung auferlegt, wenn sie eine gegebene Gerade ur Wendepunktstangente, d. h. zur Tangente im Berührungspunkte einer hrer 16) stationären Schmiegungsebene(n) haben soll, bilden vier gerade inien allgemeiner Lage doch nicht ein Quadrupel von Wendepunktsngenten. Vielmehr muß auch hier eine projektiv-invariante Beziehung wischen den vier geraden Linien bestehen.

Eine solche muß notwendig in einer Relation

$$F(D_1 D_2 D_3 D_1' D_2' D_3') = c$$

wischen den einfachsten (absoluten) projektiven liniengeometrischen Inarianten, den sechs Graßmannschen Doppelverhältnissen D_i und D_i' $= \frac{1}{D_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ von vier geraden Linien ihren analytischen Ausdruck nden. Dabei ist

$$D_1 = \frac{V}{W}, \qquad D_2 = \frac{W}{U}, \qquad D_3 = \frac{U}{V},$$

o

$$U = (g g_1)(g_2 g_3), \qquad V = (g g_2)(g_3 g_1), \qquad W = (g g_3)(g_1 g_2)$$

---

[2]) Das Prinzip der Erhaltung der Anzahl, Leipziger Berichte Bd. 68 (1916), 74—90.

[3]) Over de buigraaklijnen eener ruimtekromme van den vierden graad en de rste soort, Versl. en meded. d. K. Akad. van Wetenschappen, Amsterdam, 3, 8 (1891), 346 ff.

die bekannten quadrilinearen Kollineationsinvarianten der Cayleyschen Koordinaten Plückerscher gerader Linien sind.

Sind g_1, g_2, g_3 feste Gerade, während g variabel ist, so stellen die Gleichungen (1) oder, was dasselbe besagt:

$$(1^*) \qquad f(U:V:W)=0$$

Komplexe einer bemerkenswerten besonderen Klasse dar: die Komplexe enthalten ∞^1 lineare Kongruenzen, deren Leitgeraden sämtlich Erzeugende der durch die gegebenen drei Geraden bestimmten Regelschar zweiter Ordnung $(g_1\, g_2\, g_3)$ sind, was die Theorie dieser Komplexe besonders durchsichtig gestaltet. Insbesondere ist der Tangentenkomplex der Trägerfläche von $(g_1\, g_2\, g_3)$ mit der Gleichung:

$$(4) \qquad \sqrt{U}+\sqrt{V}+\sqrt{W}=0$$

der Ort der Geraden, die mit den drei festen Geraden $g_1\, g_2\, g_3$ speziellen linearen Kongruenzen angehören.

Herr Kluyver hat die auf seine Fragestellung bezüglichen Invarianten (mittels elliptischer Funktionen) berechnet und ist zu einer Reihe schöner Resultate geführt worden. Im folgenden sollen einige von ihnen mit Benutzung des *Graßmannschen Doppelverhältnisses* von vier Raumgeraden, dessen Bedeutung Herrn Kluyver unbekannt gewesen zu sein scheint, einfacher begründet, andere neu hinzugefügt werden. So soll insbesondere die Frage nach der Anzahl der ∞^1-Scharen gewundener Kurven vierter Ordnung erster Art, für die vier gegebene Geraden Wendepunktstangenten sind, vollständig erledigt werden[4]). Obwohl die Komplexe, auf die Herr Kluyver geführt wird, wie der Vosssche Komplex nur vom vierten Grade sind und wie jener nur eine Selbstdurchdringung aufweisen, die aus drei linearen Kongruenzen besteht (von denen jedoch zwei unendlich benachbarte sind, so daß der Komplex sich längs einer linearen Kongruenz selbst berührt, längs einer anderen schneidet), ist die Antwort hier wesentlich vielgestaltiger als die Antwort auf die erwähnte analoge Frage bei den Raumkurven dritter Ordnung: *Vier gegebene Geraden sind Wendepunktstangenten von* 0, 1, 2, 4 *oder* 6 ∞^1*-Scharen gewundener Kurven vierter Ordnung erster Art.*

---

[4]) Herr J. C. Kluyver hat sich in der Hauptsache nur mit dem Fall beschäftigt, in dem die Berührungspunkte der vier Wendepunktstangenten in einer und derselben Ebene liegen, dem symmetrischen Fall, wie er sich ausdrückt. In dem anderen Fall herrscht Asymmetrie. „Dat maakt de betrakking tuschen de vier lijnen meer ingewikkeld en de gevolgen minder merkwaardig“ (a. a. O., S. 375). Ersteres ist sicher richtig. Allein man kann der Schwierigkeiten durch eine beachtenswerte Parameterdarstellung der Kluyverschen Komplexe Herr werden, bei der das charakteristische Doppelverhältnis (der Modul) der Kurve vierter Ordnung erster Art als Parameter auftritt.

I. Kluyversche Quadrupel von Wendepunktstangenten einer Raumkurve vierter Ordnung erster Art.

Die gewundene Kurve vierter Ordnung erster Art $R^4_{p=1}$

5) $$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 1 : \wp : \wp' : \wp''.$$

wo $\wp(u)$ die der Differentialgleichung

6) $$(\wp'(u))^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)$$

genügende doppeltperiodische Weierstraßsche $\wp$-Funktion bedeutet, besitzt 16 Wendepunkte, d. h. Berührungspunkte stationärer Schmiegungsebenen. sind

$$\omega_\alpha \equiv \omega_\beta + \omega_\gamma \,(\mathrm{mod\,Per}) \qquad (\alpha \neq \beta \neq \gamma = 1, 2, 3)$$

Periodenhälften der $\wp$-Funktion derart, daß

7) $$\wp(\omega_1) = e_1, \qquad \wp(\omega_2) = e_2, \qquad \wp(\omega_3) = e_3$$

ist, so haben die 16 Wendepunkte der Kurve (5) die Argumente (8)

8)

u_0	0	ω_1	ω_2	ω_3
u_1	$0 + \frac{\omega_1}{2}$	$\omega_1 + \frac{\omega_1}{2}$	$\omega_2 + \frac{\omega_1}{2}$	$\omega_3 + \frac{\omega_1}{2}$
u_2	$0 + \frac{\omega_2}{2}$	$\omega_1 + \frac{\omega_2}{2}$	$\omega_2 + \frac{\omega_2}{2}$	$\omega_3 + \frac{\omega_2}{2}$
u_3	$0 + \frac{\omega_3}{2}$	$\omega_1 + \frac{\omega_3}{2}$	$\omega_2 + \frac{\omega_3}{2}$	$\omega_3 + \frac{\omega_3}{2}$

dabei sind die Argumente einer und derselben Horizontalreihe von (8) durch die folgenden Gleichungen charakterisiert:

9) $$2u_0 \equiv 0, \qquad 2u_1 \equiv \omega_1, \qquad 2u_2 \equiv \omega_2, \qquad 2u_3 \equiv \omega_3.$$

Vier Wendepunktstangenten der $R^4_{p=1}$ (5) in Punkten, deren Argumente einer und derselben Horizontalreihe angehören, gehen durch einen und denselben Punkt hindurch, sie sind Erzeugende je eines der vier Kegel, die das Büschel von Flächen zweiter Ordnung enthält, dessen Basiskurve die $R^4_{p=1}$ ist.

Wählt man aus jeder Horizontalreihe des Schemas (8) ein Argument aus, so erhält man Quadrupel zueinander windschiefer Wendepunktstangenten. Es gibt mithin $4^4 = 256$ solcher Quadrupel für eine gegebene $R^4_{p=1}$. Sie spalten sich in zwei Gruppen: *Quadrupel erster Art*, deren Berührungspunkte je in einer und derselben Ebene liegen, und *Quadrupel zweiter Art*, für die das nicht der Fall ist. Sind u_0, u_1, u_2, u_3 die Argumente der Berührungspunkte der Geraden g_0, g_1, g_2, g_3 eines solchen Quadrupels, so sind die Quadrupel erster Art dadurch charakterisiert, daß

$$\sum_{i=0}^{3} u_i \equiv 0 \pmod{\text{Per}} \tag{10}$$

ist. Man kann, um ein solches Quadrupel erster Art zu erhalten, au drei Horizontalreihen ein Argument beliebig auswählen, während das viert Argument alsdann eindeutig bestimmt ist. Es gibt mithin $4 \cdot 4 \cdot 4 = 6$ Quadrupel erster Art.

Ebenso findet man, daß sich die Quadrupel zweiter Art in dre Gruppen von je 64 spalten, je nachdem die Argumentensumme ihrer Be rührungspunkte

$$\sum_{i=0}^{3} u_i \equiv \omega_1, \omega_2, \omega_3 \pmod{\text{Per}} \tag{11}$$

ist.

II. Die Kollineationsinvarianten der Kluyverschen Quadrupel erster und zweiter Art.

Ein Quadrupel von geraden Linien im Raum, die sämtlich zueinande windschief sind und eine nicht-spezielle lineare Kongruenz bestimmen der sie angehören, möge *regulär* heißen. Obwohl eine $R^4_{p=1}$ von 16 wesen lichen Konstanten abhängt und man ihr nur eine viermal vierfache Bi dingung auferlegt, wenn vier gegebene gerade Linien Wendepunkt tangenten der Kurve sein sollen, kann doch nicht jedes reguläre Quadrup von geraden Linien als Quadrupel von Wendepunktstangenten einer $R^4_{p=}$ aufgefaßt werden. Quadrupel von geraden Linien, für welche dies d Fall ist, sollen nach demjenigen Autor, der diese Tatsache zuerst bemerk hat, als *Kluyversche Quadrupel* bezeichnet werden. Für ein solch Quadrupel existiert immer sogleich (mindestens) eine Schar von ∞^1 $R^4_{p=}$ denn jede Kurve, die aus dem Tangentensystem einer $R^4_{p=1}$, für die d gegebenen Geraden des Kluyverschen Quadrupels Wendepunktstangente sind, vermöge der kollinearen Umformung des Raumes hervorgeht, d mit einem jeden der ∞^1 linearen Komplexe durch die vier gegebene Geraden verknüpft ist, ist wieder eine solche Kurve.

Die Invarianten, die zwischen den vier Geraden eines Kluyversch Quadrupels erster oder zweiter Art bestehen, sind schon von Herrn Kluyv selbst ermittelt worden. Sind

$$U = (g_0 g_1)(g_2 g_3), \qquad V = (g_0 g_2)(g_3 g_1), \qquad W = (g_0 g_3)(g_1 g_2)$$

die bekannten quadrilinearen Kollineationsinvarianten der vier Gerad $g_0 g_1 g_2 g_3$, so lauten diese Beziehungen:

$$U + V + W = 0 \tag{12}$$

ir die Quadrupel *erster Art*, für die die vier Wendepunkte der $R^4_{p=1}$ in iner Ebene liegen, und

13) $$(-U+V+W)^4 - 64\,U^3 V W = 0,$$

ir die Quadrupel zweiter Art, für die die vier Wendepunkte $B_0\,B_1\,B_2\,B_3$ *icht* in einer Ebene liegen und die Verbindungsgerade von B_2 und B_3 nd damit auch diejenige von B_0 und B_1 mit der Kurve $R^4_{p=1}$ je einer nd derselben Fläche zweiter Ordnung angehören.

Zwischen den die $\wp$-Funktion der analytischen Darstellung (5) der $^4_{p=1}$ bestimmenden Größen e_i $(i = 1, 2, 3)$ und den Kollineationsinvarianten $, V, W$ bestehen dabei die (auf die Gleichungen (12) und (13) führen- en) Beziehungen:

12*) $$e_2 - e_3 : e_3 - e_1 : e_1 - e_2 = U : V : W$$

nd

13_a^*) $$e_2 - e_3 : e_3 - e_1 : e_1 - e_2 = -\,U : (\sqrt{U} \pm \sqrt{W})^2 : (\sqrt{U} \pm \sqrt{V})^2$$

ler, wenn man $U = 1$ setzt[5]):

13_a^{**}) $$e_2 - e_3 : e_3 - e_1 : e_1 - e_2 = 1 : 1 + W \pm 2\sqrt{W} : 1 + V \pm 2\sqrt{V},$$

denen über die unbestimmt gelassenen Wurzelvorzeichen durch die edingung:

13_b^*) $$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

ıtschieden wird[6]).

Die Gleichungen (12*) bzw. (13*) ordnen einem den Gleichungen (12) nügenden Wertsystem

$$U : V : W$$

ets *ein* Wertsystem

$$e_1 : e_2 : e_3$$

; im allgemeinen gilt das auch für die den Gleichungen (13) genügen- n Wertsysteme. Ist jedoch entweder:

4) $$U = 0$$

er

5) $$U : V : W = -2 : 1 : 1,$$

sind *zwei* der vier Wurzelvorzeichenkombinationen in den Gleichungen

[5]) Man vergleiche die Formeln (13_a^{**}) mit den ganz ähnlich gebauten Formeln (20), denen jedoch *jede* Wurzelvorzeichenkombination Sinn hat.

[6]) Diese Tatsache scheint Herr Kluyver nicht genügend beachtet zu haben; nigstens sind seine Formeln auf S. 379 (a. a. O.) nicht ganz korrekt und die aus en gezogenen Folgerungen infolgedessen nicht einwandfrei.

(13_a^*) mit den Bedingungen (13_b^*) verträglich. Man erhält demzufolge i diesen Fällen zwei wesentlich verschiedene, d. h. nicht zueinander pr portionale Lösungssysteme der e. Der Fall (14) hat jedoch für unse Betrachtung kein weiteres Interesse[7]), da die Ungleichung

$$U \cdot V \cdot W \neq 0 \tag{16}$$

bestehen muß, wenn die vier Geraden $g_0 g_1 g_2 g_3$ zueinander windschief se sollen. Um so wichtiger ist der zweite Fall (15).

Vier einer speziellen linearen Kongruenz angehörende Tangenten ein kubischen Raumkurve R^3 sind zugleich Wendepunktstangenten äqu anharmonische $R^4_{p=1}$, so jedoch, daß die vier Wendepunkte einer u derselben Ebene angehören[8]). Man hat:

$$U : V : W = e_2 - e_3 : e_3 - e_1 : e_1 - e_2 = 1 : \varepsilon : \varepsilon^2, \tag{17}$$

wo ε eine imaginäre dritte Einheitswurzel bedeutet. Im übrigen komm einer speziellen linearen Kongruenz angehörende Quadrupel von Wend punktstangenten nur bei den Kurven vor, für die

$$e_2 - e_3 : e_3 - e_1 : e_1 - e_2 = -2 : 1 \mp 3i\sqrt{7} : 1 \pm 3i\sqrt{7}$$

ist. Denn bei Bestehen der Ungleichungen (16) sind nur den folgende den übrigen Durchschnitten von (13) und (4) bzw. (4^*)

$$(U + V + W)^2 - 4(VW + WU + UV) = 0 \tag{4*}$$

entsprechenden Wertsystemen[9]):

$$U : V : W = 1 : 1 : 4 \quad \text{und} \quad 1 : 4 : 1 \tag{18a}$$

sowie[10])

$$U : V : W = 1 : \frac{-3 \pm i\sqrt{7}}{2} : \frac{-3 \mp i\sqrt{7}}{2} \tag{18b}$$

derartige Quadrupel zugeordnet. Und von diesen vier Wertsystemen (1 führen die beiden ersten auf Kurven vierter Ordnung mit einem (wirkliche Doppelpunkt.

III. Kollinearität Kluyverscher Quadrupel einer $R^4_{p=1}$ mit gegebene charakteristischen Doppelverhältnis (Modul).

Bezeichnet man in bekannter Weise mit

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = (\infty\, e_1\, e_2\, e_3) \tag{19}$$

---

[7]) Er führt auf $R^4_{p=0}$ (mit Doppelpunkt).
[8]) Vgl. Kluyver, a. a. O., S. 360.
[9]) Vgl. die Figuren 1 und 2 in Kap. V.
[10]) In Fig. 2 von Kap. V ist das Schnittpunktssystem (18_b) *reell*.

den (*Legendreschen*) *Modul* der Weierstraßschen $\wp$-Funktion, der gleich einem der sechs Werte ist, derer die gegenüber Kollineationen invarianten Doppelverhältnisse der vier Tangentialebenen einer $R^4_{p=1}$ durch eine beliebige ihrer Sehnen fähig sind (wobei die Tangentialebenen in den Stützpunkten der Sehne nicht mitgerechnet sind)[11]), so folgt aus (12*) unmittelbar, daß *die sechs Graßmannschen Doppelverhältnisse von vier zueinander windschiefen Wendepunktstangenten einer nicht-rationalen R^4, deren Berührungspunkte einer und derselben Ebene angehören, gleich den negativen Werten der sechs gewöhnlichen Doppelverhältnisse der Kurve sind.*

Zwei Quadrupel von geraden Linien, die nicht einer speziellen linearen Kongruenz angehören, sind kollinear zueinander, wenn sie dieselben Graßmannschen Doppelverhältnisse haben. *Alle* 64 *Quadrupel erster Art sind daher kollinear untereinander*[12]).

Für die Quadrupel zweiter Art folgt aus den Gleichungen (13*) und (19), wenn man noch setzt:

$$19_a) \qquad \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{e_1 - e_3}{e_2 - e_3} = (e_1\, e_2\, e_3\, \infty) \\ \lambda^* = \dfrac{k^2 - 1}{k^2} = \dfrac{e_1 - e_2}{e_3 - e_2} = (e_1\, e_3\, e_2\, \infty), \end{cases}$$

so daß

$$19_b) \qquad \lambda + \lambda^* = 1$$

ist:

$$20) \qquad U : V : W = 1 : 1 + \lambda^* \pm 2\sqrt{\lambda^*} : 1 + \lambda \pm 2\sqrt{\lambda},$$

wo (im Gegensatz zu den ganz gleich gebauten Formeln (13_a^{**})) sämtliche vier Vorzeichenkombinationen Sinn haben.

Einer Vertauschung von e_2 mit e_3 entspricht eine Vertauschung von λ mit λ^*; und einer solchen entspricht lediglich eine Vertauschung von V mit W, in bezug auf die die Gleichung (13) symmetrisch ist.

Zyklische Vertauschung von $e_1\, e_2\, e_3$ hat hingegen zyklische Vertauschung von $\omega_1\, \omega_2\, \omega_3$ und $U\, V\, W$ zur Folge, sowie auch von

$$\frac{k^2 - 1}{k^2}, \qquad k^2, \qquad \frac{1}{1 - k^2}$$

und

$$\frac{1}{k^2}, \qquad 1 - k^2, \qquad -\frac{k^2}{1 - k^2}.$$

die sechs Werte, derer die (gegenüber Kollineationen invarianten) charakteristischen Doppelverhältnisse einer $R^4_{p=1}$ fähig sind, führen daher nur auf

[11]) Vgl. etwa Halphen, Traité des fonctions elliptiques II, S. 449.

[12]) Was Herr Kluyver auf ganz anderem Wege (a. a. O., S. 359) bewiesen hat.

$\frac{6}{2} \cdot 4 = 12$ (im allgemeinen) voneinander kollinear verschiedene Wendepunktsquadrupel zweiter Art, und zwar gehören jeder der drei Gruppen von Quadrupeln zweiter Art (11)

$$\sum_{i=0}^{3} u_i \equiv \omega_1, \omega_2, \omega_3 \pmod{\text{Per}} \tag{11}$$

vier verschiedene Quadrupel an.

Für die *harmonische* Kurve mit

$$g_3 = 4 e_1 e_2 e_3 = 0$$

gibt es nur sieben kollinear verschiedene Quadrupel. Ist nämlich $\alpha + \beta + \gamma = 1, 2, 3$ und ist etwa für die harmonische Kurve $e_\alpha = 0$, $e_\beta = -e_\gamma$, so sind die vier nicht-kollinearen Quadrupel der Gruppen, für die die Summe der Argumente ω_β ist, kollinear zu den vier kollinear verschiedenen Quadrupeln der Gruppe mit der Argumentensumme ω_γ. Hingegen enthält die Gruppe mit der Argumentensumme ω_α nur drei kollinear verschiedene Quadrupel, indem zwei der vier kollinear verschiedenen Quadrupel des allgemeinen Falles für die harmonische Kurve hier kollinear werden (vgl. Fig. 1 in Kap. V).

Für die *äquianharmonische* Kurve mit

$$g_2 = -4(e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2) = 0$$

sind nur vier Quadrupel zweiter Art kollinear verschieden; denn hier werden die Quadrupel aller drei Gruppen mit konstanter von 0 verschiedener Argumentensumme $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ kollinear untereinander, während die Anzahl vier für die kollinear verschiedenen Quadrupel einer jeden dieser drei Gruppen erhalten bleibt.

Jede $R_{p=1}^4$ gestattet, die Identität mitgezählt, 32 automorphe Kollineationen[13]). Sie entsprechen den Substitutionen der Argumente

$$u^* = \pm u + c, \tag{21}$$

wo c eines der 16 Wendepunktsargumente (8) der $R_{p=1}^4$ bedeutet: $4c \equiv$ (mod Per). Jede dieser 32 Kollineationen (21) führt Quadrupel zweiter Art einer Gruppe (11) in Quadrupel *derselben* Gruppe über. Da jede der Gruppen 64 Quadrupel enthält, unter denen vier kollinear verschiedene voneinander sind, so können aus einem Quadrupel vermöge den 32 Kollineationen (21) nur 15 weitere hervorgehen, d. h. jedes Quadrupel einer Gruppe muß in jedes andere Quadrupel derselben Gruppe, das kollinear

[13]) Vgl. etwa Harnack, Über die Darstellung der Raumcurve vierter Ordnung 1. Spezies und ihres Secantensystems durch doppelt periodische Funktionen, Mathem. Annal. XII (1877), S. 47f.

zu ihm ist, durch zwei Kollineationen (21) übergeführt werden können. Ist etwa für die Argumente der Gruppe mit

$$\sum_{i=0}^{3} u_i \equiv \omega_1,$$

woraus wegen (9)

9) $$2u_0 \equiv 0, \quad 2u_1 \equiv \omega_1, \quad 2u_2 \equiv \omega_2, \quad 2u_3 \equiv \omega_3$$

folgt:

$$u_0 + u_1 \equiv u_2 + u_3,$$

so führen in der Tat die beiden Transformationen

22_a) $$u^* = -u$$

und

22_b) $$u^{**} = +u - (u_0 + u_1) = +u - (u_2 + u_3)$$

zu demselben Resultat. Denn vermöge (22_a) ergibt sich aus

$$\begin{matrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ -u_0 & -u_1 & -u_2 & -u_3; \end{matrix}$$

und vermöge (22_{b_1}) wird aus

$$u_0 \text{ und } u_1 \qquad -u_1 \text{ und } -u_0$$

und vermöge (22_{b_2}) wird aus

$$u_2 \text{ und } u_3 \qquad -u_3 \text{ und } -u_2$$

so daß, da (22_{b_1}) und (22_{b_2}) dieselben Substitutionen sind, tatsächlich auch hier das Quadrupel mit den Argumenten

$$u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3$$

in das Quadrupel mit

$$-u_0 \quad -u_1 \quad -u_2 \quad -u_3$$

(nur in anderer Reihenfolge genommen) übergeführt wird.

Das gleiche gilt aber auch, wie unmittelbar ersichtlich, für die (allgemeine) Substitution

23_a) $$u^0 = -u + c$$

und

23_{b_1}) $$u^{00} = +u - (u_0 + u_1) + c$$

bzw.

23_{b_2}) $$u^{00} = +u - (u_2 + u_3) + c,$$

wo wiederum

$$4c \equiv 0 \pmod{\text{Per}}$$

ist.

Die *harmonische* Kurve $R^4_{p=1}$ gestattet außer den automorphen Kollineationen (21) noch diejenigen, die durch die Substitutionen

$$u' = +iu \qquad (i = \sqrt{-1}) \tag{24}$$

induziert werden. Ist $e_\alpha = 0$ $(\alpha \neq \beta \neq \gamma = 1, 2, 3)$, so werden durch diese Quadrupel mit der Argumentensumme ω_β in solche mit der Argumentensumme ω_γ übergeführt, während die Quadrupel mit der Argumentensumme ω_α teils untereinander, teils mit sich selbst vertauscht werden.

Die *äquianharmonische* Kurve gestattet außer den automorphen Kollineationen (21) noch diejenigen, die den Substitutionen

$$u'' = \varepsilon u \qquad \left(\varepsilon = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}\right) \tag{25}$$

entsprechen. Die induzierten Kollineationen vertauschen die Quadrupel der drei Gruppen zweiter Art zyklisch untereinander. In Verbindung mit den früheren Ergebnissen folgt hieraus, daß *weder die harmonische noch die äquianharmonische* $R^4_{p=1}$ *zueinander kollineare Quadrupel von Wendepunktstangenten zweiter Art besitzt, die nicht durch automorphe Kollineationen der Kurve ineinander übergeführt werden können.* Dies ist für die Beantwortung der Frage nach den Scharen von $R^4_{p=1}$, für die die Geraden eines Kluyverschen Quadrupels Wendepunktstangenten sind, von Wichtigkeit.

IV. Zu einem Kluyverschen Quadrupel gehörige Scharen von $R^4_{p=1}$

Die 64 Quadrupel von Wendepunktstangenten erster Art einer $R^4_{p=1}$ spalten sich in 4 Gruppen von je 16 derart, daß die Quadrupel einer Gruppe durch die 32 automorphen Kollineationen der R^4 nur untereinander vertauscht werden. Da gleichwohl irgend zwei dieser Quadrupel (erster Art) kollinear zueinander sind, so folgt auf Grund der Ausführungen des III. Abschnitts, daß *jedes Kluyversche Quadrupel erster Art von vier Scharen von* $R^4_{p=1}$ *berührt wird*[14]).

Anders verhält es sich mit den Quadrupeln zweiter Art. Denn hier gibt es im allgemeinen keine kollinear gleichen Quadrupel einer gegebenen $R^4_{p=1}$, die nicht durch automorphe Kollineationen der Kurve ineinander transformiert werden könnten. Ein Kluyversches Quadrupel zweiter Art ist daher im allgemeinen nur für *eine* Schar von $R^4_{p=1}$ Wendepunktstangenten-Quadrupel. Sollen zwei oder mehrere Scharen existieren, so ist die

[14]) Was Herr Kluyver (a. a. O., S. 374) auf ganz anderem Wege bewiesen hat

nseren früheren Ausführungen zufolge nur dadurch möglich, daß entweder *ine* $R^4_{p=1}$ Quadrupel von Wendepunktstangenten besitzt, die zu sich selbst ollinear sind, ohne identisch zu sein, analog z. B. vier harmonischen unkten, oder aber, daß ein Quadrupel von Wendepunktstangenten einer $^4_{p=1}$ kollinear ist zu einem solchen Quadrupel einer *anderen*, zu der rsten nicht-kollinearen Kurve. Treten beide Fälle zugleich auf, so werden ehr als zwei Scharen existieren.

Ausgehend von den Gleichungen (13) kann man auf den ersten Fall uf zwei Weisen geführt werden:

1. durch die Wertsysteme, die der Gleichung (13) genügen und für die $V = W$ ist; oder
2. durch solche Wertsysteme, für die $U = V$ oder $U = W$ ist.

Im ersten Falle erhält man:

26a) $$U : V : W = 6 \pm 4\sqrt{2} : 1 : 1$$

nd

26b) $$U : V : W = \quad -2 : 1 : 1.$$

Allein die Gleichungen (26a) führen auf *harmonische* Kurven und ie zu sich selbst kollinearen Quadrupel gehen hier durch automorphe ollineationen der $R^4_{p=1}$ in sich über, sie führen daher nicht zu ausgeeichneten Kluyverschen Quadrupeln (vgl. Fig. 1 in Kap. V). Wohl ber die Gleichungen (26b). Sind $g_1\ g_2\ g_3$ drei feste Geraden, während $_0 = g$ variabel ist, so stellt die Gleichung (13) einen Linienkomplex ar, der ∞^1 lineare Kongruenzen enthält (und der besonderen Klasse on Linienkomplexen angehört, die ich in dieser Zeitschrift[15]) einehender untersucht habe). Die Gleichungen (26b) stellen eine *Doppel-Kongruenz* dieses Komplexes dar, die merkwürdigerweise zugleich dem nearen Komplex (12) angehört. Hieraus folgt, daß diejenigen ausgeeichneten, aber regulären Quadrupel von geraden Linien, für die

27) $$U : V : W = -2 : 1 : 1,\ 1 : -2 : 1,\ 1 : 1 : -2$$

t, für $4 + 2 = 6$ Scharen[16]) von je $\infty^1 R^4_{p=1}$ Wendepunktstangenten sind:

Im zweiten Falle $U = V$ (oder $U = W$) erhält man

28) $$\begin{cases} U : V : W = 1 : 1 : 0, \\ U : V : W = 1 : 1 : 4, \\ U : V : W = 1 : 1 : 4\varepsilon, \end{cases}$$

---

[15]) Über eine besondere Klasse von Linienkomplexen, Math. Zeitschr. Bd. II, 27 ff.

[16]) Die vier Scharen, für die die Wendepunkte einer und derselben Ebene anhören, bestehen aus *harmonischen* Kurven.

wo ε wieder eine imaginäre dritte Einheitswurzel bedeutet. Das erst dieser Gleichungssysteme scheidet aus der Betrachtung aus, da in diesem Falle zwei der Geraden, nämlich g_3 und g_0 einander schneiden. Da zweite System ist das Gleichungssystem (18_a); es scheidet somit ebenfal aus unserer Betrachtung aus. Es bleibt daher nur das letzte Syste übrig. Dieses führt auf Kurven, deren Modul k^2

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = -\frac{1}{3}$$

ist.

Außer den $R^4_{p=1}$, für die einer der Werte ihrer charakteristische Doppelverhältnisse gleich $\frac{1}{4}$ (Fall (28_3)) *oder* $\frac{1}{2} \pm i\sqrt{2}$ (Fall (26_b)) *is gibt es daher keine $R^4_{p=1}$ mit Wendepunktstangenten-Quadrupeln, die z sich selbst kollinear sind, ohne durch automorphe Kollineationen de Kurve in sich übergeführt zu werden.*

Die Gleichungen (28) repräsentieren (vgl. Kap. V) $5 + 1 + 2 = 8$ de $4 \cdot 4 = 16$ gemeinsamen Kongruenzen der Komplexe

$$(-U + V + W)^4 - 64\, U^2 V W = 0,$$
$$(-V + W + U)^4 - 64\, V^2 W U = 0.$$

Die Strahlen g der acht übrigen gemeinsamen Kongruenzen sind aus gezeichnete Kluyversche Quadrupel, die für zwei Scharen von $R^4_{p=}$ Wendepunktstangenten sind, die jedoch *nicht* kollinear zueinander sind.

Ein reguläres Quadrupel von geraden Linien im Raum ist mithi für

0, 1, 2, 4 oder 6

Scharen von $R^4_{p=1}$ ein Quadrupel von Wendepunktstangenten. Die aus gezeichneten Quadrupel, die für zwei und nur zwei Scharen von je ∞ $R^4_{p=1}$ Wendepunktstangenten sind, zerfallen in zwei Arten: die Kurve der einen Schar sind kollinear zu den Kurven der andern Scha (Fall (28_3)) *oder sie sind es nicht.*

V. Die Kluyverschen Komplexe und ihre ebene Abbildung.

Um die geschilderten Verhältnisse ein wenig zu veranschaulichen und einen Einblick in den Bau und die Realitätsverhältnisse der zugehörige Kluyverschen Komplexe zu gewinnen, bedienen wir uns der ebene Abbildung der besonderen Klasse von Komplexen, der die Kluyversche Komplexe angehören, und die ich in dieser Zeitschrift (a. a. O.) eingehende studiert habe. Den erzeugenden linearen Kongruenzen

$$U : V : W$$

der Komplexe entsprechen in dieser Abbildung Punkte $U : V : W$ ebene

Kurven. Die speziellen linearen Kongruenzen, deren Leitgeraden der Regelschar $(g_1\ g_2\ g_3)$ angehören, die durch die drei festen Geraden $g_1\ g_2\ g_3$ (als Erzeugenden) bestimmt ist, und deren Strahlen Tangenten der Trägerfläche dieser Regelschar sind, werden auf die Punkte des Kegelschnitts mit der Gleichung (4) bzw. (4*)

$$(U+V+W)^2-4(VW+WU+UV)=0 \tag{4*}$$

abgebildet. Je nachdem der Bildpunkt einer linearen Kongruenz im Innern oder Äußern dieses Kegelschnitts liegt, ist die Kongruenz elliptisch oder hyperbolisch, und die Berührungspunkte der Tangenten, die von einem Punkte aus an den Fundamental-Kegelschnitt (4*) gezogen werden können, sind die Bilder der Leitgeraden dieser Netze (betrachtet als Achsen spezieller linearer Kongruenzen).

Deutet man die $U:V:W$ als homogene baryzentrische Punktkoordinaten in bezug auf ein gleichseitiges Dreieck, so stellt die Gleichung (4) bzw. (4*) den diesem Dreieck einbeschriebenen Kreis dar.

Der Gleichung (13)

$$(-U+V+W)^4-64\,U^2VW=0 \tag{13}$$

entspricht eine rationale (unikursale) Kurve vierter Ordnung, die das Koordinatendreieck in den Mitten B und C zweier Seiten berührt und diese Berührungspunkte zu Undulations-(Flach-)Punkten hat. Der reelle Zug der Kurve verläuft ganz im Innern des Koordinatendreiecks *I II III* und schneidet den ihm einbeschriebenen Kreis (4*) in seinen Schnittpunkten mit den zu B und C gehörigen seitenhalbierenden Transversalen (vgl. Fig. 1). Auf der unendlich fernen Geraden

$$U+V+W=0 \tag{12}$$

liegen die (isolierten) singulären Punkte der Kurve: ein gewöhnlicher Doppelpunkt D^∞ mit den Koordinaten $-2:1:1$ im Schnittpunkt mit der dritten zu A gehörigen seitenhalbierenden Transversalen des Koordinatendreiecks, und ein isolierter „Selbstberührungspunkt" S^∞ mit den Koordinaten $0:-1:1$, für den die dritte Seite $U=0$ des Koordinatensystems Tangente ist. Man gewinnt die lebhaft an das entsprechende Bild des Vossschen Komplexes erinnernde Fig. 1:

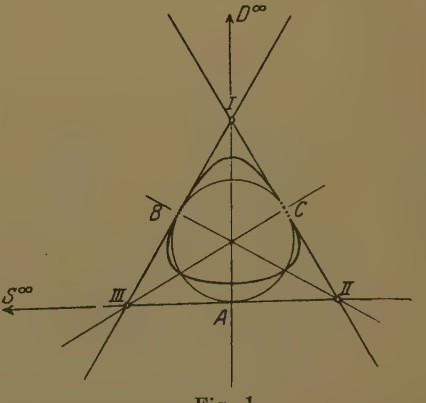

Fig. 1

Diese Fig. 1 veranschaulicht zugleich die Realitätsverhältnisse des ent-

sprechenden Kluyverschen Komplexes, jedoch nur für den Fall, in dem die drei gegebenen festen Geraden g_1 g_2 g_3 (denen die Punkte A, B, C in der Figur entsprechen) sämtlich reell sind. Wir erhalten aber auch reelle Komplexe, wenn zwei der festen Geraden, g_2 und g_3, konjugiert imaginär sind, während die dritte g_1 reell ist. In diesem Falle veranschaulicht Fig. 1 die Realitätsverhältnisse natürlich nicht. Es bedarf vielmehr einer kleinen Koordinaten-Transformation, die bewirkt, daß die Punkte B und C konjugiert-imaginär (in bezug auf ein reelles Koordinatensystem) werden, um die Realitätsverhältnisse auch hier klarzulegen.

Wir setzen zu diesem Zwecke:

$$(29)\qquad \begin{cases} U = w \\ V = \frac{1}{2}(u + iv) \\ W = \frac{1}{2}(u - iv) \end{cases} \qquad \text{bzw. } (29^*) \begin{cases} u = V + W \\ v = \frac{V - W}{i} \\ w = U, \end{cases}$$

wo $i = \sqrt{-1}$ ist, so daß $V + W = u$ und $VW = \frac{1}{4}(u^2 + v^2)$ reelle Ausdrücke in den Koordinaten $u : v : w$ werden. Alsdann wird aus dem Fundamentalkegelschnitt k in der Form (4^*)

$$(30)\qquad k^* \equiv w^2 - v^2 - 2uw = 0,$$

während aus f (13)

$$(31)\qquad f^* \equiv (u - w)^4 - 16w^2(u^2 + v^2) = 0$$

wird und die Gleichung (12) der unendlich-fernen Geraden l übergeht in

$$(32)\qquad l^* \equiv u + w = 0.$$

Setzt man weiter, um zu rechtwinkligen kartesischen Koordinaten überzugehen:

$$(33)\qquad u = \frac{1 - x}{2}, \qquad v = y, \qquad w = 1,$$

woraus folgt

$$(33^*)\qquad x = 1 - 2u, \qquad y = v, \qquad 1 = w,$$

so wird aus k^*, f^*, l^* bezüglich:

$$\begin{cases} k^{**} \equiv y^2 - x = 0, \\ f^{**} \equiv (1 + x)^4 - 64[(1 - x)^2 + 4y^2] = 0, \\ l^{**} \equiv x - 3 = 0. \end{cases}$$

Man erhält das folgende Bild (Fig. 2):

Die Doppelpunkte der unikursalen Kurve vierter Ordnung f^{**} sind hier nicht-isoliert: der einfache Doppelpunkt D hat die Koordinaten $x = 3$

$= 0$; der Selbstberührungspunkt S^∞ ist der unendlich ferne Punkt der -Achse, Tangente in ihm ist die unendlich ferne Gerade (der (x, y)-bene). Die Punkte mit den Koordinaten $x = -13$, $y = \pm 4\sqrt{2}$ sind elle Wendepunkte von f^{**}. Andere reelle Singularitäten hat die Kurve icht.

f^{**} schneidet den Fundamentalkegelschnitt, der hier als Parabel mit er x-Achse als Achse erscheint, in nur zwei reellen Punkten. Sie haben ie Koordinaten (die aus den Werten (18_b) vermöge (29) und (33) hervor-ehen):

(18_b^*) $$x = 7, \qquad y = \pm\sqrt{7}.$$

er f^{**} entsprechende Kluyversche Komplex enthält somit nur zwei elle spezielle (parabolische) lineare Kongruenzen, die das Kontinuum iner hyperbolischen von dem-nigen der elliptischen linearen ongruenzen trennen. Ersterem ehört die Selbstberührungskon-ruenz an, während die gewöhn-che Doppelkongruenz ellip-sch ist.

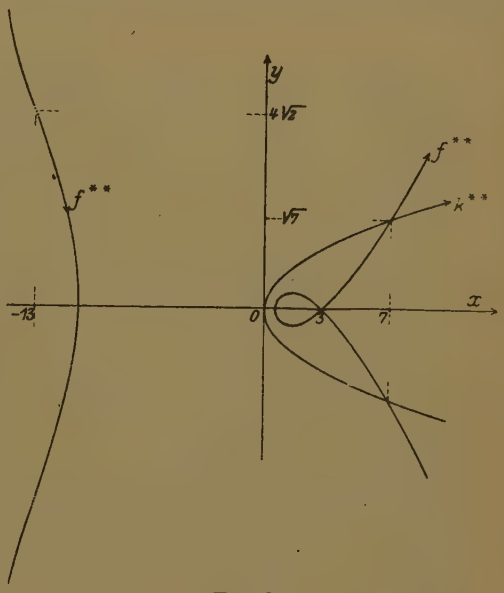

Fig. 2.

Wir erwähnen schließlich, aß die unikursale Kurve vier-r Ordnung f^{**} eine Kurve om *Maximalindex* ist: jede elle Gerade in der Ebene der urve hat wenigstens zwei reelle unkte mit f^{**} gemein. Jeder ner solchen Geraden ent-rechende lineare Komplex hat ithin mit dem entsprechenden luyverschen Komplex wenig-ens zwei reelle lineare Kon-uenzen gemein. Betrachtet man den reellen Zug der unikursalen urve f^{**} als nicht-algebraischen Ort ihrer reellen Punkte, so kann f^{**} s aus *zwei* Zügen dritter Ordnung, zwei (nicht-algebraischen) *kubischen arabeln* mit demselben (reellen) unendlich fernen Wendepunkte, be-ehend aufgefaßt werden. Die eine dieser kubischen Parabeln, die ohne oppelpunkt, verläuft ganz außerhalb dem Fundamentalkegelschnitt k^{**}; n den zuletzt genannten reellen Schnittkongruenzen ist daher immer enigstens eine hyperbolisch usw. usw.

(Eingegangen am 6. April 1919.)

Über stetige Kurven, Jordansche Kurvenbögen und geschlossene Jordansche Kurven.

Von

Heinrich Tietze in Erlangen.

1. Es soll gezeigt werden, daß in jeder stetigen Kurve, die zwei von einander verschiedene Punkte a, b verbindet, ein von a nach b führender Jordanscher Kurvenbogen enthalten ist, wobei noch besondere Anforderungen hinsichtlich der Erhaltung der ursprünglichen Anordnung der Punkte erfüllt werden können. Einige Anwendungen und allgemeinere Fragen seien in Nr. 5—7 besprochen[1]). Genauer ausgesprochen lautet der zu beweisende Satz:

Es seien den Parameterwerten $0 \leqq t \leqq 1$ vermöge einer eindeutigen stetigen Beziehung $x = x(t)$ die Elemente (Punkte) x zugeordnet, wobei $x(0) = a + x(1) = b$ sei. Dann gibt es eine für alle Werte $0 \leqq u \leqq 1$ definierte monoton wachsende Funktion $t = t(u)$, so daß $0 \leqq t(u) \leqq 1$ gilt und $x = x(t(u))$ eine für alle $0 \leqq u \leqq 1$ stetige Beziehung ist, die für verschiedene Werte u stets verschiedene Punkte x und im besonderen $x(t(0)) = a$, $x(t(1)) = b$ liefert. In dem Raum der Punkte x stellt also $x = x(t(u))$ einen einfachen (Jordanschen) Kurvenbogen dar[2]).

Über diesen Raum sind keine besonderen Voraussetzungen nötig. Er kann z. B. ein n-dimensionaler euklidischer Raum sein oder eine allge-

---

[1]) Auf die in Nr. 5 besprochene Kennzeichnung Jordanscher Kurvenbögen, die sich mittels des ausgesprochenen Satzes und des von H. Hahn eingeführten Begriffes des „Zusammenhangs im kleinen“ geben läßt, habe ich kürzlich in einem Vortrag im mathematischen Kränzchen in Prag hingewiesen.

[2]) Diesem Satz zufolge gibt es also z. B. in jeder stetigen auf die Parameterwerte $t_0 \leqq t \leqq t_1$ bezogenen Kurve $x = x(t)$, die ein Quadrat (Peano, Hilbert) oder einen Würfel ausfüllt, wenn man irgend zwei, verschiedene Punkte x liefernde Parameterwerte τ_0, τ_1 auswählt ($t_0 \leqq \tau_0 < \tau_1 \leqq t_1$), stets einen dem Kurvenbogen $\tau_0 \leqq t \leqq$ angehörenden Jordanschen Kurvenbogen von $x(\tau_0)$ nach $x(\tau_1)$, dessen Punkte monoton von τ_0 bis τ_1 wachsende Werte t entsprechen.

neine Fréchetsche Klasse oder ein allgemeiner topologischer Raum im Sinne Hausdorffs[3]). Es genügt, daß durch Limes-, Umgebungs- oder Abstandsdefinitionen der Stetigkeitsbegriff für die Abbildung der Punktmenge $\leqq t \leqq 1$ auf Punkte x des betreffenden Raumes festgelegt sei, derart, daß einer Folge ineinander eingeschalteter abgeschlossener Teilintervalle des Intervalles $0 \leqq t \leqq 1$ mit nur einem einzigen gemeinsamen Wert $t = t_0^*$ eine Folge von abgeschlossenen Punktmengen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ des x-Raumes entspricht, so daß jede Punktfolge, die aus jeder dieser Mengen einen Punkt enthält, den Punkt $x(t_0^*)$ zum Limes hat.

2. Zur Vereinfachung sollen beim Beweise unseres Satzes im folgenden dyadisch geschriebene Brüche verwendet ($0{,}1 = \frac{1}{2}$, $0{,}101 = \frac{5}{8}$) und die bei fortgesetzter Zweiteilung des Intervalles $0 \leqq u \leqq 1$ sich ergebenden Teilintervalle, die wir „dyadische Teilintervalle" nennen wollen, nach folgendem Muster bezeichnet werden: $(0{,}0 \leqq u \leqq 0{,}1)$ mit $V_{0,0}^{(1)}$, $(0{,}1 \leqq u \leqq 1{,}0)$ mit $V_{0,1}^{(1)}$, $(0{,}1010 \leqq u \leqq 0{,}1011)$ mit $V_{0,1010}^{(4)}$, $(0 \leqq u \leqq 1)$ mit $V_0^{(0)}$.

Zunächst ist es leicht, zwei Werte $t = p^*$ und $t = q^*$ zu finden, welche folgenden Bedingungen genügen:

$$0 \leqq p^* < q^* \leqq 1, \quad x(p^*) = a, \quad x(q^*) = b, \quad x(t) \neq a, b \text{ für } p^* < t < q^*.$$

Man betrachte hierzu die offenbar abgeschlossene[4]) Menge aller Werte p, für welche $x(p) = a$, ferner die gleichfalls abgeschlossene Menge aller q, für die $x(q) = b$ ist, und konstruiere in einer ξ-η-Ebene die Menge M aller möglichen Punkte $(\xi = p, \eta = q)$, die offenbar auch abgeschlossen ist und keinen Punkt auf der Geraden $\eta = \xi$ enthält. Wir betrachten die Teilmenge M_1 aller Punkte von M mit $\xi < \eta$ und denken von jedem Punkt von M_1 aus als Scheitel den zum IV. Quadranten parallelen rechten Winkel gezeichnet. Wegen der Abgeschlossenheit der Menge M_1, die mindestens den einen Punkt $(0, 1)$ enthält, ist klar, daß es solche Punkte $= p^*$, $q = q^*$ geben muß, so daß der zugehörige rechte Winkel einschließlich seiner Schenkel keinen Punkt von M_1 außer dem Scheitel enthält[5]). Z. B. kann man p^* gleich dem größten aller Werte p und q^* gleich dem kleinsten aller Werte $q > p^*$ wählen.

Wir werden p^* auch mit $t(0)$, q^* mit $t(1)$ oder auch mit $t'(1)$ bezeichnen.

3. Dem Intervall $V_0^{(0)}$ werde das mit $W_0^{(0)}$ bezeichnete Intervall $0) \leqq t \leqq t'(1)$ zugeordnet, — wir denken dabei nicht an eine punkt-

[3]) Vgl. F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914, Kap. 7, S. 213.

[4]) Aus $x(p_n) = a$ und $\lim p_n = p_0$ folgt $x(p_0) = \lim x(p_n) = a$.

[5]) Diese einfache Konstruktion, die später nochmals herangezogen wird (Nr. 3), erinnert an bekannte Verhältnisse bei konvexen Figuren. An Stelle der Stützgeraden treten andere Figuren, hier rechte Winkel.

weise Zuordnung, sondern nur an eine der ganzen Intervalle, — un damit auch der zugehörige Bogen $L_0^{(0)}$ der Kurve $x = x(t)$, für den ge mäß Nr. 2 seine beiden Endpunkte $x(t(0)) = x(p^*)$ und $x(t'(1)) = x(q^*$ einfache Punkte sind.

Wir wollen annehmen, für irgendein $n \geqq 0$ und für jeden endliche dyadischen Bruch v, der gleich $0{,}1^n$ mal einer ganzen Zahl $\geqq 0$ und $<$ ist, sei dem dyadischen Intervall $V_v^{(n)}$ ein mit $W_v^{(n)}$ bezeichnetes Interva $t(v) \leqq t \leqq t'(v + 0{,}1^n)$ zugeordnet, so daß folgende Bedingungen erfül sind: 1. für alle Werte v, die > 0 sind, ist $t'(v) \leqq t(v)$; 2. für alle de Intervallen $W_v^{(n)}$ entsprechenden Bögen $L_v^{(n)}$ der Kurve $x = x(t)$ sind d beiden Endpunkte $x(t(v))$ und $x(t'(v + 0{,}1^n))$ einfache Punkte; 3. es i $x(t(v)) = x(t'(v))$ für alle genannten dyadischen Brüche $v\,(> 0)$; 4. auße den in 3. genannten Stellen haben zwei zu verschiedenem v gehörend Kurvenbögen $L_v^{(n)}$ keinen Punkt miteinander gemein.

Für $n = 0$ sind diese Bedingungen offenbar erfüllt. Wir wollen ei Verfahren angeben, das aus der gemachten Annahme für den Wert n a eine den gleichen Bedingungen für den Wert $n + 1$ genügende Zuordnu von Intervallen $W_v^{(n+1)}$ und Kurvenbögen $L_v^{(n+1)}$ zu den Intervallen $V_v^{(n+$ führt.

Hierzu werde mit jedem der Intervalle $V_v^{(n)}$ bzw. $W_v^{(n)}$ folgendermaße verfahren. Wir setzen $\tau_v = 0{,}1 \cdot (t(v) + t'(v + 0{,}1^n))$. Man findet nu leicht zwei Werte r^* und s^*, die den Bedingungen genügen:

$$t(v) < r^* \leqq \tau_v \leqq s^* < t'(v + 0{,}1^n), \quad x(r^*) = x(s^*),$$
$$x(\xi) \neq x(\eta) \text{ für alle } t(v) \leqq \xi \leqq r^*, \quad s^* \leqq \eta \leqq t'(v + 0{,}1^n),$$
$$\text{ausgenommen } \xi = r^*, \ \eta = s^*.$$

Man betrachte nämlich die offenbar abgeschlossene Menge aller jen Punkte $(\xi = r, \ \eta = s)$ in einer ξ-η-Ebene, für welche $t(v) < r \leqq \tau$ $\tau_v \leqq s < t'(v + 0{,}1^n)$, $x(r) = x(s)$ ist, und die mindestens aus dem eine Punkt (τ_v, τ_v) besteht. Denken wir uns von jedem Punkt dieser Meng als Scheitel einen rechten Winkel parallel zum II. Quadranten gezeichne so ist klar, daß es solche Punkte $r = r^*$, $s = s^*$ geben muß, so daß d zugehörige rechte Winkel einschließlich seiner Schenkel keinen Punkt d Menge außer dem Scheitel enthält. Z. B. kann man r^* gleich dem kleinste aller Werte r und s^* gleich dem größten s-Wert aller Punkte $(r^*,$ unserer Menge wählen. Irgendein solches Wertepaar r^*, s^* genügt da gerade den oben genannten Bedingungen.

Wir setzen nun $t'(v + 0{,}1^{n+1}) = r^*$, $t(v + 0{,}1^{n+1}) = s^*$, womit d Intervalle $W_v^{(n+1)}$, $W_{v+0{,}1^{n+1}}^{(n+1)}$ gefunden sind. Alle diese $W^{(n+1)}$ erfülle dann offenbar die Bedingungen 1., 2., 3., 4.

Die schrittweise Anwendung dieses Verfahrens zeigt zugleich, daß jedes $W_v^{(n)}$ eine Länge $\leqq 0{,}1^n$ hat.

4. Für jede Zahl u des Intervalls $0 \leqq u \leqq 1$, die durch einen unendlichen dyadischen Bruch (mit Ausschluß der periodisch auf 111 ... endigenden) dargestellt wird, werde mit $U^{(n)}(u)$ jenes dyadische Teilintervall $V_v^{(n)}$ von der Größe $0{,}1^n$ bezeichnet, dem u angehört ($n \geqq 0$). Ganz ebenso werde $U^{(n)}(u)$ für $u = 0$, für $u = 1$ und für jeden endlichen dyadischen Bruch (> 0 und < 1) mit m Stellen definiert, sofern $n < m$ ist. Für $n \geqq m$ gibt es im letztgenannten Fall zwei Intervalle $V_v^{(n)}$, denen u angehört (als Endpunkt bzw. Anfangspunkt). Unter $U^{(n)}(u)$ soll dann ihre Vereinigung, d. h. das Intervall von $u - 0{,}1^n$ bis $u + 0{,}1^n$, die Grenzen eingeschlossen, verstanden werden.

Je nachdem $U^{(n)}(u)$ ein $V_v^{(n)}$ oder die Vereinigung von zweien ist, werde unter $T^{(n)}(u)$ das zugehörige $W_v^{(n)}$ oder die Vereinigungsmenge der beiden zugehörigen $W_v^{(n)}$ verstanden, entsprechend unter $K^{(n)}(u)$ der zugehörige Kurvenbogen $L_v^{(n)}$ oder die Vereinigungsmenge der beiden zugehörigen $L_v^{(n)}$. Im letzteren Falle, wo u gleich einem endlichen dyadischen Bruch v mit höchstens n Stellen ist, haben diese beiden Kurvenbögen nur den einen Punkt $x(t'(v)) = x(t(v))$ miteinander gemein.

Da die $W_v^{(n)}$ mit wachsendem n beliebig klein werden, so ergibt sich für die Folge $T^{(0)}(u_0), T^{(1)}(u_0), \ldots, T^{(n)}(u_0), \ldots$: Wenn u_0 gleich einem endlichen dyadischen Bruch v ist, ist außer $t'(v)$ und $t(v)$ kein Wert allen $T^{(n)}(u_0)$ gemein. Wenn u_0 gleich einem unendlichen dyadischen Bruch ist, haben alle $T^{(n)}(u_0)$ einen einzigen Wert t gemein, den wir mit $t(u_0)$ bezeichnen, womit $t(u)$ für alle Werte $0 \leqq u \leqq 1$ definiert ist.

Der Punkt $x = x(t(u_0))$ gehört jedem Kurvenbogen $K^{(n)}(u_0)$ an und für alle dem Intervall $U^{(n)}(u_0)$ angehörenden Werte u gehört $t(u)$ zur Menge $T^{(n)}(u_0)$ und $x(t(u))$ zum Kurvenbogen $K^{(n)}(u_0)$.

Wenn $\lim u_m = u_0$ ist, also in jedem $U^{(n)}(u_0)$ fast alle u_m enthalten sind, dann sind in jedem $T^{(n)}(u_0)$ fast alle $t(u_m)$ enthalten. Die $t(u_m)$ können also nur den einen Wert $t(u_0)$, oder wenn u_0 gleich einem endlichen dyadischen Bruch v ist, die beiden Werte $t'(v)$, $t(v)$ zur Häufungswerten haben, woraus wegen $x(t'(v)) = x(t(v))$ in allen Fällen $\lim x(t(u_m)) = x(t(u_0))$, d. h. die Stetigkeit der Kurve $x = x(t(u))$ folgt.

Wenn $u_0 < u_1$ ist, so gibt es ein n, so daß alle Zahlen des Intervalls $U^{(n)}(u_0)$ kleiner sind als alle Zahlen des Intervalls $U^{(n)}(u_1)$, also auch alle Zahlen von $T^{(n)}(u_0)$ kleiner als alle von $T^{(n)}(u_1)$; somit ist $t(u_0) < t(u_1)$, also $t = t(u)$ monoton wachsend. Da aber dann auch $T^{(n)}(u_0)$ und $K^{(n)}(u_1)$ keinen Punkt miteinander gemein haben (vgl.

Nr. 3, Bedingung 4), so folgt $x(t(u_0)) \neq x(t(u_1))$, d. h. die Kurve $x = x(t(u))$ ist einfach.

Damit ist der Satz von Nr. 1 bewiesen.

5. Unter Benutzung dieses Satzes und mittelst des von H. Hahn[6] eingeführten Begriffes des „Zusammenhangs im kleinen", der nach dessen Arbeiten ein wesentliches Merkmal der allgemeinen stetigen (nicht notwendig einfachen) Kurven in Räumen sehr allgemeiner Art darstellt, lassen sich nun auch die Jordanschen Kurvenbögen in sehr allgemeinen Räumen in einfacher Weise kennzeichnen auf Grund eines Gedankens, der sich schon in den Arbeiten von L. Zoretti und S. Janiszewski über den Begriff der Linie findet[7]).

Der Begriff des Zusammenhangs im kleinen wird bei H. Hahn für Räume definiert, für welche *Abstände* zwischen den Elementen definiert sind (genauer, für Fréchetsche Klassen (V)), doch läßt sich die Definition ohne weiteres auf die besonders von F. Hausdorff[8]) betrachteten „topologischen Räume", für die bloß *Umgebungen* der Elemente definiert sind, ausdehnen. Dabei wollen wir allgemein von „topologischen Gebilden" sprechen, wenn wir sowohl topologische Räume als Mengen in topologischen Räumen betrachten und nur absolute topologische Eigenschaften ins Auge fassen, bei denen nicht zur betreffenden Menge gehörige Elemente eines sie enthaltenden Raumes keine Rolle spielen[9]). Ist dann x ein Element des Gebildes G, U_x eine Umgebung von x (innerhalb G), so soll unter einer „x umgebenden Menge $\overline{U}_x$" eine Menge (in G) verstanden werden, die eine Umgebung U_x enthält; G heißt dann „zusammenhängend im kleinen im Punkte x", wenn es in jeder x umgebenden Menge $\overline{U}_x$ eine zusammenhängende[10]) x umgebende Menge $\overline{V}_x$ gibt; G heißt „zusammen-

---

[6]) Vgl. H. Hahn a) Jahresber. der Deutsch. Math. Ver. 23 (1914), S. 318–32 und b) Sitzungsber. der Wien. Akad. d. Wiss. 123 (1914), 2. Halbbd., S. 2433–2489.

[7]) Die von den genannten Autoren erlangte Abgrenzung führt allerdings nicht auf Jordansche Kurvenbögen, sondern auf eine umfassendere, auch komplizierter Gebilde enthaltende Kategorie. Vgl. Encycl. des sc. math., art. II 2 (t. II, vol. 1) S. 138 ff., art. III 2 (t. III, vol. 1), S. 160 ff.

[8]) F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914, Kap. 7 ff.

[9]) Die historische Entwicklung der Mengenlehre hat das merkwürdige Ergebnis gezeitigt, daß vielfach relative Eigenschaften, die einer Menge in Bezug auf einen sie enthaltenden Raum zukommen (z. B. abgeschlossen, kompakt), vorangestellt, hingegen absolute topologische Eigenschaften, die einem Gebilde an und für sich zukommen (z. B. in sich kompakt = extremal) erst mittelst relativer Eigenschaften erklärt werden. — Man vgl. übrigens F. Hausdorff, loc. cit. [8]), S. 241 f., wo betont wird, daß jede in einem Raum gelegene Menge selbst als ein Raum für sich betrachtet werden kann.

[10]) Vgl. die Definition bei Hausdorff, loc. cit. [8]), S. 244, die wohl die zweckmäßigste und allgemeinste sein dürfte.

ängend im kleinen", wenn G in jedem seiner Punkte zusammenhängend m kleinen ist.

Wenn wir nun etwa von einem topologischen Raum R voraussetzen, aß für ihn folgender Satz gilt, — allgemeine Voraussetzungen zu entickeln, unter denen dies zutrifft, sei Ausführungen an anderer Stelle orbehalten —:

(A) In jeder zusammenhängenden, im kleinen zusammenhängenden lenge M in R gibt es zu irgend zwei Punkten a, b von M stets einen tetigen in M liegenden Kurvenbogen von a nach b, dann kann man die ordanschen Kurvenbögen in einem solchen Raum kennzeichnen als lengen M, die folgenden Bedingungen genügen:

(α) M ist zusammenhängend und zusammenhängend im kleinen.

(β) M enthält zwei Punkte a, b $(a \neq b)$ derart, daß es keine echte eilmenge von M gibt, die zusammenhängend und zusammenhängend im leinen ist und a und b enthält.

Daß jeder Jordansche Kurvenbogen (α) und (β) erfüllt, ist klar. ei umgekehrt (α), (β) erfüllt, so gibt es gemäß (A) in M einen stetigen, nd somit auf Grund unseres Satzes (Nr. 1) einen Jordanschen Kurvenogen J von a nach b. Enthielte nun M noch einen nicht zu J gehörigen unkt c, und daher auch Jordansche Kurvenbögen K_a, K_b von c nach a, zw. b, so wäre die Vereinigungsmenge von J, K_a und K_b nach Wegssung des Punktes c eine echte Teilmenge von M, die a und b enthält nd zusammenhängend und zusammenhängend im kleinen ist, was (β) iderspräche. Daher ist $M = J$ tatsächlich ein Jordanscher Kurvenogen.

In engerem Anschluß an die Untersuchungen von Hahn lassen sich nwiederum in den als normale Klassen (V) bezeichneten Räumen[11]) die ordanschen Kurvenbögen als extremale (kompakte und abgeschlossene) engen, die (α), (β) erfüllen, kennzeichnen.

6. Noch einfacher als die Jordanschen Kurvenbögen lassen sich schlossene Jordansche Kurven (topologische Abbilder der Kreislinie) in äumen, in denen (A) gilt, kennzeichnen, nämlich als Mengen M, die

(α_1) zusammenhängend und zusammenhängend im kleinen sind und

(β_1) nach Wegnahme irgend eines ihrer Punkte zusammenhängend eiben, nach Wegnahme irgend zweier ihrer Punkte zerfallen[12]).

---

[11]) Die von M. Fréchet, Rend. del circ. mat. di Palermo, Bd. 22 (1906[2]), S. 23 geführt worden sind; vgl. auch Hahn, Wien. Sitzber. loc. cit.[6]) b), S. 2456 (die dingung 3, — keine isolierten Elemente — spielt auch hier keine Rolle).

[12]) Hierin sei zugleich ausgesprochen, daß M mehr als einen Punkt enthält.

Seien nämlich a, b irgend zwei Punkte einer solchen Menge M und J ein zufolge (A) und des Satzes der Nr. 1 in M vorhandener Jordansche Kurvenbogen von a nach b, ferner $N_1 + N_2$ eine Zerlegung der nach Wegnahme von a, b aus M übrig bleibenden Menge N. Es bedeute M_i die aus a, b und den Punkten von N_i bestehenden Menge $(i = 1, 2)$, J_1 gehöre zu M_1. Dann muß sowohl a als b Häufungspunkt sowohl von N_1 als von N_2 sein, da sonst schon die Wegnahme eines dieser Punkte ein Zerfallen von M bewirken würde. Dabei ist M_2 zusammenhängend; bestünde nämlich eine Zerlegung $M_2 = M_{2a} + M'_{2a}$, wobei a zu M_{2a} gehöre, so könnte b nicht zu M_{2a} gehören, da sonst M'_{2a} ein mit dem Rest von M nicht zusammenhängender Teil von M wäre; b gehörte also zu M'_{2a}; dann würde aber die Menge M nach Wegnahme schon des einen Punktes a in $M'_{2a} + N_1$ einerseits und die um den Punkt a verminderte Menge M_{2a} andrerseits zerfallen; M_2 ist also zusammenhängend und ersichtlich zusammenhängend im Kleinen. Gemäß (A) und Satz der Nr. 1 muß es somit in M_2 einen Jordanschen Kurvenbogen J_2 von a nach b geben; J_2 mit J_1 vereinigt liefert eine geschlossene Jordansche Kurve J.

Enthielte nun M außer J noch einen Punkt c, der etwa zu N_1 gehöre, so müßte es in M eine stetige Kurve K geben, die c mit einem irgend wie gewählten Punkt von J (z. B. mit a) verbindet. Sei d der erste Punkt von J, den man auf K von c ausgehend erreicht. Da M auch nach Wegnahme von d zusammenhängend bleiben soll, so muß es auch noch mindestens eine stetige Kurve von c zu J geben, die J erstmalig in einem Punkt $e \neq d$ erreicht. Da c zu N_1 gehört, so müssen d und e dem Bogen J_1 angehören, wobei bei Durchlaufen des Bogens J von a nach b zuerst d und dann e angetroffen werden möge.

Sei nun a' ein Punkt von J_1 zwischen d und e, b' ein Punkt von J zwischen a und b. Dann kann man an das Paar der Punkte a', b' von J dieselben Schlüsse knüpfen, wie oben an a, b und es mögen N', N'_1, N'_2, M'_1, M'_2 die entsprechende Bedeutung haben, wie oben N, N_1 usw. Jedes M'_i $(i = 1, 2)$ enthält einen Jordanschen Kurvenbogen J'_i von a' nach b'. Die Indices 1, 2 seien so gewählt, daß N'_1 den Punkt a enthalte. Dann muß b zu N'_2 gehören, da andernfalls M'_2 und also auch J'_2 keinen der Punkte a, b enthielte, in N also die a' mit b' verbindende Menge J' enthalten wäre, während doch a' und b' zu den voneinander getrennten Teilen N_1 und N_2 gehören. In der Menge N' ist nun aber c sowohl mit d und daher mit a, als auch mit e und daher mit b verbunden, während doch a und b den voneinander getrennten Teilen N'_1 und N'_2 angehören sollen. Es kann also einen Punkt c außerhalb J nicht geben, $M = J$. Sonach sind (α_1), (β_1) hinreichende — und natürlich auch notwendige — Bedingungen dafür, daß M eine Jordansche Kurve sei.

7. Sei schließlich angeführt, daß der Satz in Nr. 1 Fragen nach Verallgemeinerungen nahelegt, wie z. B. die folgende:

Es seien die Punkte von $x^2 + y^2 \leqq 1$ eindeutig und stetig auf die Punkte einer Menge M derart abgebildet, daß dabei die Punkte von $x^2 + y^2 = 1$ eineindeutig auf ihre Bildpunkte bezogen sind, die somit eine Jordansche Kurve J erfüllen. Unter welchen Bedingungen ist dann in M eine Menge M_1 enthalten, die eineindeutig stetig auf $x^2 + y^2 \leqq 1$ bezogen werden kann, und zwar so, daß J in M_1 enthalten ist und etwa in derselben Weise wie früher auf $x^2 + y^2 = 1$ bezogen erscheint[13])?

Brünn, am 2. Juli 1919.

---

[13]) Eine solche Menge M_1 gibt es z. B. nicht, wenn J verknotet im R_3 liegt und M die Menge der Punkte der Radienvektoren von einem Punkt O außerhalb J zu den Punkten von J ist. (Zusatz bei der Korrektur.)

Eingegangen am 5. Juli 1919).

Über halbstetige Funktionen und deren Verallgemeinerung.

Von

Felix Hausdorff in Greifswald.

Für einige bekannte Sätze über stetige und halbstetige Funktionen gebe ich in § 1 neue und, wie mir scheint, besonders einfache Beweise sowie einen merkwürdigen logischen Zusammenhang. Den Mittelpunkt bildet der *Hahnsche*[1]) *Einschiebungssatz* II, seinerseits gestützt auf den Baireschen[2]) Satz I über halbstetige Funktionen als Grenzen monotoner Folgen von stetigen Funktionen; aus II folgere ich unmittelbar drei Sätze des Herrn H. Tietze[3]), wovon der wichtigste, der *Ergänzungssatz* III, auf etwas künstlichem Wege auch von Herrn H. Bohr[4]) bewiesen wurde. Für III gebe ich auch noch einen direkten Beweis, der, wie der Beweis von I, wohl die äußerste Vereinfachung in der von Herrn Tietze eingeschlagenen Richtung sein dürfte. — In § 2 übertrage ich die Hauptsätze auf allgemeinere Funktionensysteme, zu denen z. B. die Baireschen Funktionenklassen gehören; die hier entwickelte Theorie berührt sich vielfach mit einer Abhandlung von Herrn H. Lebesgue[5]), doch erforderte die (von Herrn W. H. Young[6]) begonnene) Berücksichtigung monotoner Folgen wesentliche Zusätze.

---

[1]) H. Hahn, Über halbstetige und unstetige Funktionen, Wiener Akad. Ber. **126** (1917), S. 91–110.

[2]) R. Baire, Leçons sur les fonctions discontinues (Paris 1905), S. 124.

[3]) H. Tietze, Über Funktionen, die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind, Journ. f. Math., **145** (1915), S. 9–14.

[4]) C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen (Leipzig und Berlin 1918), §§ 541–43 und S. VI. Einen Beweis für den Euklidischen Raum gibt auch L. E. J. Brouwer, Über die Erweiterung des Definitionsbereichs einer stetigen Funktion, Math. Ann. **79** (1918), S. 209–211.

[5]) H. Lebesgue, Sur les fonctions représentables analytiquement, Journ. de Math., (6) **1** (1905), S. 139–216.

[6]) W. H. Young, On functions and their associated sets of points, Lond. Math. Soc. Proc., (2) **12** (1912), S. 260–287, und anderwärts.

Die im folgenden betrachteten Funktionen $f(x)$ sollen reell und endlich sein $(-\infty < f(x) < +\infty)$, aber nicht notwendig beschränkt: gerade dieser Standpunkt bedingt einige Erschwerungen, die bei beschränkten Funktionen oder bei Zulassung der Werte $\pm\infty$ wegfallen. Sie sollen ferner sämtlich in einem *metrischen Raume* R, d. h. in einer Menge definiert sein, deren Elemente (Punkte) dem Dreiecksaxiom genügende Entfernungen xy haben:

$$xx = 0, \quad xy = yx > 0 \quad \text{für} \quad x \neq y,$$
$$xy + yz \geqq xz;$$

R kann z. B. ein Euklidischer, ein Hilbertscher, ein Funktionenraum oder eine beliebige Teilmenge solcher Räume sein.

§ 1.

I. *Jede unterhalb stetige Funktion ist Limes einer aufsteigenden Folge stetiger Funktionen* (R. Baire).

Die Funktion $\varphi(x)$ sei unterhalb stetig, d. h. für jedes positive ε sei in einer hinlänglich kleinen Umgebung[7]) von x (für $xz < \varrho$)

$$\varphi(z) > \varphi(x) - \varepsilon$$

oder auch: es sei

$$\underline{\lim}\, \varphi(z) \geqq \varphi(x) \quad \text{für} \quad z \to x.$$

Nehmen wir zunächst $\varphi(x) \geqq \lambda$ nach unten beschränkt an und definieren $f(x)$, nach Wahl einer positiven Zahl k, als untere Grenze des Ausdrucks $\varphi(z) + k \cdot xz$ für alle Punkte z des Raumes, oder mit einer von Herrn M. Pasch empfohlenen Bezeichnung

$$f(x) = \inf_z [\varphi(z) + k \cdot xz].$$

Offenbar ist $f(x) \geqq \lambda$ und (wenn man speziell $z = x$ nimmt) $f(x) \leqq \varphi(x)$.

Die Stetigkeit von $f(x)$ ist leicht einzusehen. Sind x, y zwei Punkte mit $xy = \delta > 0$ und bestimmt man z so, daß

$$\varphi(z) + k \cdot xz < f(x) + \delta,$$

so ist

$$f(y) \leqq \varphi(z) + k \cdot yz < f(x) + \delta + k(yz - xz) \leqq f(x) + (k+1)\delta,$$

also (wegen der Vertauschbarkeit von x, y) $|f(y) - f(x)| < (k+1)\delta$.

Nunmehr setzen wir für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$f_n(x) = \inf [\varphi(z) + n \cdot xz],$$

[7]) In isolierten Punkten des Raumes, deren Existenz wir ja nicht ausschließen, ist jede Funktion (unterhalb und oberhalb) stetig.

also $f_n(x)$ stetig und $\lambda \leqq f_n(x) \leqq f_{n+1}(x) \leqq \varphi(x)$; es existier
$\lim f_n(x) = f(x) \leqq \varphi(x)$.

Bestimmen wir aber einen Punkt z_n mit

$$\varphi(z_n) + n \cdot xz_n < f_n(x) + \frac{1}{n},$$

so ist

$$xz_n < \frac{1}{n}(\varphi(x) + 1 - \lambda),$$

also $z_n \to x$, und man erhält

$$\varphi(x) \leqq \underline{\lim}\, \varphi(z_n) \leqq f(x),$$

also $\varphi(x) = f(x)$ ist Limes der aufsteigenden stetigen Funktionen $f_n(x$

Sodann sei $\Phi(x)$ unterhalb stetig, aber nicht nach unten beschränkt
Die Funktion

$$\varphi = \frac{\Phi}{1 + |\Phi|}$$

ist unterhalb stetig und beschränkt $(-1 < \varphi < 1)$, also Limes aufsteiger
der stetiger Funktionen φ_n mit $-1 \leqq \varphi_n \leqq \varphi < 1$. Um diese durch Funk
tionen zu ersetzen, die zwischen ± 1 mit *Ausschluß* beider Grenzen liegen
verfahren wir so. Es sei $\varepsilon_n > 0$, $\sum \varepsilon_n$ konvergent und $1 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots$
Bilden wir dann die Reihe

$$f_n = \varphi_n + \varepsilon_1(\varphi_{n+1} - \varphi_n) + \varepsilon_2(\varphi_{n+2} - \varphi_{n+1}) + \dots,$$

die wegen $0 \leqq \varphi_{\nu+1} - \varphi_\nu < 2$ gleichmäßig konvergiert und eine stetig
Funktion f_n darstellt, so ist

$$\varphi_n \leqq f_n \leqq \varphi_n + (\varphi_{n+1} - \varphi_n) + (\varphi_{n+2} - \varphi_{n+1}) + \dots = \varphi,$$
$$f_{n+1} = \varphi_n + (\varphi_{n+1} - \varphi_n) + \varepsilon_1(\varphi_{n+2} - \varphi_{n+1}) + \dots \geqq f_n,$$

f_n konvergiert aufsteigend nach φ. Endlich ist $f_n > -1$, nämlich en
weder $\varphi_n = \varphi_{n+1} = \varphi_{n+2} = \dots$ und $f_n = \varphi > -1$, oder $f_n > \varphi_n \geqq -1$
Die stetigen Funktionen

$$F_n = \frac{f_n}{1 - |f_n|}$$

konvergieren nunmehr aufsteigend nach $\frac{\varphi}{1 - |\varphi|} = \Phi$.

Damit ist I bewiesen. Umgekehrt ist der Limes $g(x) = \lim g_n(x$
einer aufsteigenden Folge stetiger oder unterhalb stetiger Funktionen $g_n(x$
wieder unterhalb stetig. Denn wählt man erst n so, daß $g_n(x) > g(x) - \varepsilon$
dann eine Umgebung von x, in der $g_n(z) > g_n(x) - \varepsilon$, so ist in diese
Umgebung $g(z) > g(x) - 2\varepsilon$.

Jede oberhalb stetige Funktion ist Limes einer absteigenden Folg
stetiger Funktionen; der Limes einer absteigenden Folge (oberhalb) stetige
Funktionen ist oberhalb stetig.

II. *Ist $g(x)$ unterhalb, $h(x)$ oberhalb stetig und überall $g(x) \geqq h(x)$, so gibt es eine stetige Funktion $f(x)$ mit $g(x) \geqq f(x) \geqq h(x)$* (H. Hahn).

Setzen wir zur Abkürzung für reelles t

$$\{t\} = \max[t, 0] = \tfrac{1}{2}|t| + \tfrac{1}{2}t \geqq 0,$$

es ist dies eine stetige, mit wachsendem t nicht abnehmende Funktion von t. Sei nun $g \geqq h$,

$$g = \lim g_n, \qquad g_1 \leqq g_2 \leqq \dots$$
$$h = \lim h_n, \qquad h_1 \geqq h_2 \geqq \dots$$

$g_n = g_n(x)$ und $h_n = h_n(x)$ stetige Funktionen. Es ist

$$(1) \qquad h_1 - g_1 \geqq h_1 - g_2 \geqq h_2 - g_2 \geqq h_2 - g_3 \geqq \dots$$

Daher auch

$$\{h_1 - g_1\} \geqq \{h_1 - g_2\} \geqq \{h_2 - g_2\} \geqq \{h_2 - g_3\} \geqq \dots$$

und diese Funktionen konvergieren nach $\{h - g\} = 0$. Die alternierende Reihe

$$f = g_1 + \{h_1 - g_1\} - \{h_1 - g_2\} + \{h_2 - g_2\} - \{h_2 - g_3\} + \dots$$

konvergiert daher für jedes x, ihre Partialsummen sind stetige Funktionen und f ist als Limes der aufsteigenden (absteigenden) Partialsummen ungerader (gerader) Ordnung eine unterhalb (oberhalb) stetige, d. h. schlechthin stetige Funktion.

Endlich ist $g \geqq f \geqq h$. Denn für $g = h$ sind alle Glieder der Folge (1) $\geqq 0$; also

$$f = g_1 + (h_1 - g_1) - (h_1 - g_2) + (h_2 - g_2) - (h_2 - g_3) + \dots$$
$$= \lim g_n = \lim h_n = g = h.$$

Für $g > h$ achten wir auf das erste negative Glied in (1); ist es $h_n - g_n$, so ist

$$f = g_1 + (h_1 - g_1) - (h_1 - g_2) + \dots - (h_{n-1} - g_n) = g_n,$$
$$g \geqq g_n > h_n \geqq h;$$

ist es $h_n - g_{n+1}$, so ist

$$f = g_1 + (h_1 - g_1) - (h_1 - g_2) + \dots + (h_n - g_n) = h_n,$$
$$g \geqq g_{n+1} > h_n \geqq h.$$

In den folgenden Sätzen bedeute A eine (im Raume R) abgeschlossene Menge, $B = R - A$ die komplementäre offene Menge (Gebiet). Mit x, y, z bezeichnen wir Punkte von A, B, R. Es sei

$$\varrho(z) = \inf_x xz$$

der Abstand des Punktes z von A, also $\varrho(x)=0$, $\varrho(y)>0$. Bekanntlich ist

$$|\varrho(z)-\varrho(z_0)|\leqq z_0 z,$$

also $\varrho(z)$ stetige Funktion von z.

III. *Eine in der abgeschlossenen Menge A definierte, stetige Funktion $\varphi(x)$ läßt sich zu einer im ganzen Raume stetigen Funktion $f(z)$ ergänzen* (H. Tietze).

Sei zunächst $\varphi(x)$ beschränkt, $\lambda\leqq\varphi(x)\leqq\mu$. Die durch

$$g(x)=\varphi(x),\quad g(y)=\mu$$

definierte Funktion $g(z)$ ist unterhalb stetig, die durch

$$h(x)=\varphi(x),\quad h(y)=\lambda$$

definierte Funktion $h(z)$ oberhalb stetig und durchweg $g(z)\geqq h(z)$. Nach dem Hahnschen Einschiebungssatz II gibt es also eine stetige Funktion $f(z)$ mit $g(z)\geqq f(z)\geqq h(z)$, also $f(x)=\varphi(x)$. Übrigens ist auch $\lambda\leqq f(z)\leqq\mu$.

Sei sodann $\Phi(x)$ in A stetig, aber unbeschränkt;

$$\varphi(x)=\frac{\Phi(x)}{1+|\Phi(x)|}$$

ist stetig und $-1<\varphi(x)<1$. Es gibt also eine in A mit $\varphi(x)$ übereinstimmende stetige Funktion $f(z)$ mit $-1\leqq f(z)\leqq 1$; indem wir aber $f(z)$ durch $\frac{f(z)}{1+\varrho(z)}$ ersetzen, erhalten wir eine ebensolche Funktion vom Betrage <1. Nehmen wir daher $-1<f(z)<1$ an, so stimmt die stetige Funktion $F(z)=\frac{f(z)}{1-|f(z)|}$ in A mit $\Phi(x)$ überein.

Um auch direkt eine Funktion $f(z)$ der verlangten Eigenschaft zu bilden (wieder im Falle eines beschränkten $\varphi(x)$, $\lambda\leqq\varphi(x)\leqq\mu$), definieren wir

$$f(x)=\varphi(x),\quad f(y)=\inf_x\left[\varphi(x)+\frac{xy}{\varrho(y)}-1\right].$$

Wegen $xy\geqq\varrho=\varrho(y)$ ist $f(y)\geqq\lambda$, überdies für jedes x

$$f(y)\leqq\mu+\frac{xy}{\varrho}-1,$$

und wenn man x eine Punktfolge mit $xy\to\varrho$ beschreiben läßt: $f(y)\leqq\mu$.

Es ist die Stetigkeit von $f(z)$ zu zeigen, d. h. wenn x_0, y_0 Punkte von A, B bedeuten, zu beweisen, daß

$$f(y)\to f(y_0)\quad\text{für}\quad y\to y_0,$$
$$f(y)\to\varphi(x_0)\quad\text{für}\quad y\to x_0.$$

Zu dem Zweck ist zu bemerken, daß wir uns bei der Bestimmung von $f(y)$ auf Punkte x beschränken können, für die

$$\varphi(x)+\frac{xy}{\varrho}-1<f(y)+1,$$

also

$$\frac{xy}{\varrho}<\mu-\lambda+2,$$

d. h. $xy<c\varrho$ (c eine Konstante).

Sei nun $yy_0=\delta$ $(0<\delta<1)$ und bestimmen wir einen Punkt x mit

(2) $$\varphi(x)+\frac{xy}{\varrho}-1<f(y)+\delta,\quad xy<c\varrho.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}f(y_0)&\leqq\varphi(x)+\frac{xy_0}{\varrho_0}-1\\&<f(y)+\delta+\frac{xy_0}{\varrho_0}-\frac{xy}{\varrho}\\&=f(y)+\delta+\frac{xy_0-xy}{\varrho_0}+xy\left(\frac{1}{\varrho_0}-\frac{1}{\varrho}\right)\\&<f(y)+\delta+\frac{\delta}{\varrho_0}+c\varrho\cdot\frac{\delta}{\varrho\varrho_0},\\f(y_0)&<f(y)+\delta\left(1+\frac{c+1}{\varrho_0}\right).\end{aligned}$$

Ebenso durch Vertauschung von y, y_0

$$f(y)<f(y_0)+\delta\left(1+\frac{c+1}{\varrho}\right).$$

Für $y\to y_0$ $(\delta\to 0,\ \varrho\to\varrho_0)$ konvergiert also $f(y)$ nach $f(y_0)$.

Ferner sei $x_0y=\delta<1$; wir bestimmen wieder einen Punkt x gemäß (2) und einen Punkt ξ (ebenfalls in A) mit $\xi y<\varrho(1+\delta)$, also

$$f(y)\leqq\varphi(\xi)+\frac{\xi y}{\varrho}-1<\varphi(\xi)+\delta,$$

d. daß

$$\varphi(x)-\delta<f(y)<\varphi(\xi)+\delta$$

wird. Da nun wegen $\varrho\leqq\delta$ und auf Grund der Dreiecksungleichung mit y auch x und ξ nach x_0 konvergieren, so konvergiert $f(y)$ nach $\varphi(x_0)$.

IV. *Es sei $\varphi(z)$ nach unten beschränkt und in der abgeschlossenen Menge A stetig. Es gibt eine stetige Funktion $f(z)\leqq\varphi(z)$, die in A mit $\varphi(z)$ übereinstimmt* (H. Tietze).

Hier wird also die Gesamtfunktion $\varphi(z)$, in III nur die Teilfunktion $\varphi(x)$ in A stetig angenommen. — Es sei $\varphi(z)\geqq\lambda$. Man definiere $g(z)$ als untere Grenze von $\varphi(z)$ im Punkte z, d. h. $g(z_0)=\underline{\lim}\,\varphi(z)$ für $z\to z_0$ ($z=z_0$ nicht ausgeschlossen). Es ist also $g(z_0)\leqq\varphi(z_0)$, während für beliebige positive δ, ε auch einen Punkt z mit $z_0z<\delta$, $\varphi(z)<g(z_0)+\varepsilon$

gibt. Diese Funktion g ist bekanntlich unterhalb stetig, denn für $z_n \to z$ bestimme man einen Punkt ζ_n mit $z_n \zeta_n < \frac{1}{n}$, $\varphi(\zeta_n) < g(z_n) + \frac{1}{n}$, dann ist auch $\zeta_n \to z_0$ und

$$g(z_0) \leqq \underline{\lim}\, \varphi(\zeta_n) \leqq \underline{\lim}\, g(z_n).$$

Überdies ist $g(x) = \varphi(x)$ und $\varphi(y) \geqq g(y) \geqq \lambda$. Andererseits ist die durch

$$h(x) = \varphi(x), \qquad h(y) = \lambda$$

definierte Funktion oberhalb stetig und durchweg $g(z) \geqq h(z)$. Es gibt also eine stetige Funktion $f(z)$ mit $g(z) \geqq f(z) \geqq h(z)$, also

$$f(x) = \varphi(x) \quad \text{und} \quad f(y) \leqq \varphi(y).$$

Direkt kann man eine solche Funktion, wenigstens für beschränktes $\varphi(z)$, durch

$$f(x) = \varphi(x), \qquad f(y) = \inf_z \left[\varphi(z) + \frac{yz}{\varrho(y)}\right]$$

definieren; der Beweis der Stetigkeit ist ähnlich wie bei III.

V. *Jede unterhalb stetige, in der abgeschlossenen Menge A stetige Funktion $\varphi(z)$ ist Limes einer aufsteigenden Folge stetiger Funktionen, die in A mit $\varphi(z)$ übereinstimmen.* (H. Tietze.)

$\varphi(z)$ sei zunächst nach unten beschränkt, es gibt also nach IV eine stetige Funktion $f(z) \leqq \varphi(z)$ mit $f(x) = \varphi(x)$. Andererseits ist nach I $\varphi(z)$ Limes aufsteigender stetiger Funktionen $\varphi_n(z) \leqq \varphi(z)$. Die stetigen Funktionen

$$f_n(z) = \max[\varphi_n(z), f(z)]$$

konvergieren dann aufsteigend nach $\max[\varphi(z), f(z)] = \varphi(z)$, während $f_n(x) = \max[\varphi_n(x), f(x)] = \max[\varphi_n(x), \varphi(x)] = \varphi(x)$ ist.

Der Fall eines unbeschränkten $\varphi(z)$ ist genau wie in I zu behandeln.

§ 2.

Wir übertragen die wichtigsten der vorstehenden Sätze, indem wir an Stelle der stetigen Funktionen ein ziemlich allgemeines System von reellen Funktionen mit gemeinsamem Definitionsbereich R zugrunde legen; diese Menge R (die wir Raum und deren Elemente wir Punkte nennen) darf zunächst eine ganz beliebige Menge sein, zwischen deren Elementen keine (durch Umgebungen, Entfernungen o. dgl. vermittelte) Relationen vorausgesetzt werden. Erst bei der Anwendung auf die „analytisch darstellbaren", d. h. durch wiederholte Limesbildung aus den stetigen Funktionen hervorgehenden *Baireschen Funktionen* werden wir R als metrischen Raum annehmen. Wie zuvor sollen alle Funktionen endlich sein; wenn

wir also z. B. von der oberen Grenze $\sup f_n(x)$ einer Folge von Funktionen sprechen, so setzen wir voraus, daß die $f_n(x)$ für jedes x eine nach oben beschränkte Zahlenfolge bilden.

Eine gegebene Funktion $f = f(x)$ bestimmt die *Lebesgueschen Mengen*

$$[f > y], \qquad [f \geqq y]$$

der Punkte x, worin f größer oder nicht kleiner als die gegebene reelle Zahl y ist. Wenn die Mengen M, N gegebene Mengensysteme durchlaufen und die Menge $[f > y]$ für jedes y ein M, oder die Menge $[f \geqq y]$ für jedes y ein N ist, oder beides zugleich eintrifft, so sagen wir, daß die Funktion f von der Klasse $(M, *)$ oder $(*, N)$ oder (M, N) ist.

Durchläuft z. B. A die abgeschlossenen, B die offenen Mengen eines metrischen Raumes R, so sind die oberhalb stetigen Funktionen mit denen der Klasse $(*, A)$, die unterhalb stetigen mit denen der Klasse $(B, *)$, die stetigen mit denen der Klasse (B, A) identisch. Denn ist $f(x)$ unterhalb stetig, also für jedes $\varepsilon > 0$ in einer hinlänglich kleinen Umgebung von x_0 $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$, so enthält die Menge $[f > y]$ von jedem ihrer Punkte auch eine gewisse Umgebung, ist also eine offene Menge, und umgekehrt.

Es ist zu unterscheiden, ob wir von Mengen M, N gegebener Systeme ausgehend alle Funktionen f der Klasse (M, N) oder umgekehrt von Funktionen f eines gegebenen Systems ausgehend alle Mengen $M = [f > y]$, $N = [f \geqq y]$ bilden (für alle f und y). Deuten wir diese Bestimmungen für den Augenblick durch die Bezeichnung $(M, N) \to f$, $f \to (M, N)$ an und üben sie wiederholt aus, so werden bei

$$(M, N) \to f \to (M_1, N_1)$$

die M_1 im allgemeinen nur einen Teil der M, die N_1 nur einen Teil der N bilden, bei

$$f \to (M, N) \to f_1$$

umgekehrt die f nur einen Teil der f_1, und die Behauptung, daß, etwa im zweiten Fall, jede Funktion f_1 der Klasse (M, N) wieder ein f ist, wird eines Beweises bedürfen.

Es durchlaufe nun f ein Funktionensystem mit folgenden Eigenschaften:

(α) *Jede Konstante ist ein f.*

(β) *Das Maximum und Minimum zweier f ist wieder ein f.*

(γ) *Summe, Differenz, Produkt und Quotient* (mit durchweg nichtverschwindendem Nenner) *zweier f ist wieder ein f.*

Hiernach ist auch der Betrag eines f

$$|f| = \max[f, 0] - \min[f, 0]$$

wieder ein f.

Es bedeute nun g den Limes einer aufsteigenden, h den Limes einer absteigenden Folge von Funktionen f; k eine Funktion, die zugleich ein g und ein h ist; endlich f^* den Limes einer konvergenten Folge von Funktionen f. Wir bemerken sofort, daß $-g$ ein h ist und umgekehrt; von den auf Limites monotoner Folgen bezüglichen Sätzen genügt es also, die auf g bezüglichen auszusprechen. Jedes f ist ein k, jedes k ein g und h, jedes g und h ein f^*.

Statt $g = \lim f_n$ $(f_1 \leqq f_2 \leqq \ldots)$ können wir auch $g = \sup f_n$ schreiben; umgekehrt ist die obere Grenze einer Folge von f ein g, denn

$$\sup f_n = \lim \max [f_1, f_2, \ldots, f_n],$$

und sogar die obere Grenze einer Folge von g wieder ein g, denn ist $g_n = \sup_p f_{np}$, so ist

$$\sup g_n = \sup [f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{13}, f_{22}, f_{31}, \ldots].$$

I. *Maximum, Minimum und Summe zweier g ist wieder ein g.*

Denn wenn f_n aufsteigend nach g, f_n' aufsteigend nach g' konvergiert, so konvergieren

$$\max [f_n, f_n'], \quad \min [f_n, f_n'], \quad f_n + f_n'$$

aufsteigend nach

$$\max [g, g'], \quad \min [g, g'], \quad g + g'.$$

II. *Der Limes einer gleichmäßig konvergenten Folge von Funktionen f ist ein k.*

Sei gleichmäßig $f^* = \lim f_n$; ist $\varepsilon = \Sigma \varepsilon_n$ eine konvergente Reihe positiver Zahlen, so können wir aus den f_n Funktionen $f_\alpha, f_\beta, f_\gamma, \ldots$ mit wachsenden Indizes herausgreifen, die sich von allen folgenden um weniger als $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ unterscheiden. Schreiben wir dann

$$\begin{aligned} f^* &= f_\alpha + (f_\beta - f_\alpha) + (f_\gamma - f_\beta) + \ldots \\ &= \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots, \end{aligned}$$

wo die φ_n wieder Funktionen f und, von φ_0 abgesehen, vom Betrage $< \varepsilon_n$ sind. Demnach ist

$$\begin{aligned} f^* &= (\varphi_0 - \varepsilon) + (\varphi_1 + \varepsilon_1) + (\varphi_2 + \varepsilon_2) + \ldots \\ &= (\varphi_0 + \varepsilon) + (\varphi_1 - \varepsilon_1) + (\varphi_2 - \varepsilon_2) + \ldots \end{aligned}$$

zugleich ein g und ein h.

III. *Maximum und Minimum, Summe, Differenz, Produkt und Quotient zweier f^* ist wieder ein f^*.*

Beweis wie von I; nur der Quotient bedarf einer Bemerkung, wobei es genügt zu zeigen, daß, für $f^* \neq 0$, $\frac{1}{f^*}$ wieder ein f^* ist. Ist $f^* = \lim f_n$ überall positiv, so kann man auch $f_n > 0$ annehmen (indem man es durch $\max\left[f_n, \frac{1}{n}\right]$ ersetzt, welches nach $\max[f^*, 0] = f^*$ konvergiert), und dann ist $\frac{1}{f^*} = \lim \frac{1}{f_n}$. Ist $f^* \neq 0$, so ist $f^* \cdot \frac{1}{f^{*2}} = \frac{1}{f^*}$ wieder ein f^*.

IV. *Der Limes einer gleichmäßig konvergenten Folge von Funktionen f^* ist wieder ein f^*.*

Ist gleichmäßig $F = \lim f_n^*$, so kann man wie bei II

$$F = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots$$

setzen, wo die φ_n Funktionen f^* und für $n > 0$ vom Betrage $< \varepsilon_n$ sind. Für eine Funktion $f^* = \lim f_p$ vom Betrage $< \varepsilon$ kann man $|f_p| \leqq \varepsilon$ voraussetzen, indem man f_p durch $f_p' = \max[f_p, -\varepsilon]$ und sodann durch $f_p'' = \min[f_p', \varepsilon]$ ersetzt. Sei demnach

$$\varphi_0 = \lim_p f_{0p}, \quad \varphi_n = \lim_p f_{np}, \quad |f_{np}| \leqq \varepsilon_n.$$

Die Funktion

$$f_p = f_{0p} + f_{1p} + \dots + f_{pp},$$

die ein f ist, konvergiert aber nach F, welches also ein f^* ist. Denn man wähle, bei gegebenem $\delta > 0$ und Argument x, n so groß, daß $\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+2} + \dots < \delta$, und $p_0 \geqq n$ so groß, daß, für $p \geqq p_0$, $f_{0p} + \dots + f_{np}$ sich von $\varphi_0 + \dots + \varphi_n$ um weniger als δ unterscheidet. Dann unterscheidet sich F von $\varphi_0 + \dots + \varphi_n$, dieses von $f_{0p} + \dots + f_{np}$, dieses von $f_{0p} + \dots + f_{np} + \dots + f_{pp}$ um weniger als δ, also $|F - f_p| < 3\delta$ für $p \geqq p_0$.

Man bemerke noch, daß wegen

$$\overline{\lim} f_n = \lim g_n, \quad g_n = \sup[f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \dots]$$

der obere Limes einer Folge von Funktionen f zugleich Limes (oder untere Grenze) einer absteigenden Folge von Funktionen g ist, kurz

$$\overline{\lim} f_n = \inf g_n, \quad \underline{\lim} f_n = \sup h_n;$$

die Funktionen f^* sind beider Darstellungen fähig.

Wir führen nun die Lebesgueschen Mengen unserer Funktionen ein; die Mengen

$$[f > y], \quad [f \geqq y], \quad [g > y], \quad [h \geqq y], \quad [f^* > y], \quad [f^* \geqq y]$$

mögen mit

$$M, \quad N, \quad P, \quad Q, \quad M^*, \quad N^*$$

bezeichnet werden (wobei f usw. alle bezeichneten Funktionen und y alle reellen Zahlen zu durchlaufen hat; offenbar kann man aber y fest lassen, z. B. $y = 0$ setzen, da $f - y$ wieder ein f ist usw.). Es wird sich erstens um die Bestimmung der P, Q, M^*, N^* aus den gegebenen M, N und zweitens um die Umkehrung der Tatsache handeln, daß die Funktionen g, h, k, f^* von den Klassen $(P, *)$, $(*, Q)$, (P, Q), (M^*, N^*) sind; wobei nicht vorausgesetzt wird, daß jede Funktion der Klasse (M, N) umgekehrt ein f sei (vgl. Satz VIII).

Die Summen und Durchschnitte aus Folgen von Mengen M bezeichnen wir generell mit

$$M_\sigma = M_1 \dot{+} M_2 \dot{+} M_3 \dot{+} \dots,$$

$$M_\delta = M_1 M_2 M_3 \dots;$$

ebenso bedeute $M_{\sigma\delta}$ den Durchschnitt einer Folge von Mengen M_σ, $M_{\delta\sigma}$ die Summe einer Folge von Mengen M_δ usw. Man bemerkt ohne weiteres, daß die M und N Komplemente voneinander sind, ebenso die P und Q, ebenso die M^* und N^* (denn $-f$ ist ein f, $-g$ ein h usw.); ferner ist Summe und Durchschnitt zweier M wieder ein M, und dasselbe gilt für die übrigen Mengengattungen, denn ist $M_1 = [f_1 > 0]$, $M_2 = [f_2 > 0]$, so ist $M_1 \dot{+} M_2$ die Menge, wo $\max[f_1, f_2] > 0$, und $M_1 M_2$ die Menge, wo $\min[f_1, f_2] > 0$.

Es gilt nun, auch wenn die M und N ganz beliebige Mengensysteme durchlaufen:

V. *Jede Funktion der Klasse* $(M, *)$ *ist von der Klasse* $(*, M_\delta)$, *jede Funktion der Klasse* $(*, N)$ *ist von der Klasse* $(N_\sigma, *)$.

Denn $[f \geqq y]$ ist Durchschnitt der Mengen $\left[f > y - \frac{1}{n}\right]$, $[f > y]$ Summe der Mengen $\left[f \geqq y + \frac{1}{n}\right]$ für $n = 1, 2, \dots$

VI. *Die obere Grenze einer Folge von Funktionen* $(M, *)$ *ist von der Klasse* $(M_\sigma, *)$, *die untere Grenze einer Folge von Funktionen* $(*, N)$ *ist von der Klasse* $(*, N_\delta)$.

Denn für $g = \sup f_n$ ist $[g > y]$ Summe der Mengen $[f_n > y]$; für $h = \inf f_n$ ist $[h \geqq y]$ Durchschnitt der Mengen $[f_n \geqq y]$.

Hiernach gilt zur Bestimmung unserer Mengen aus den M, N der Satz:

VII. *Die* P *sind mit den* M_σ, *die* Q *mit den* N_δ, *die* M^* *mit den* Q_σ, *die* N^* *mit den* P_δ *identisch.*

Jede dieser vier Behauptungen besteht aus zwei Hälften, z. B. besagt die erste: jedes P ist ein M_σ und jedes M_σ ist ein P. Die erste Hälfte (jedes P ist ein M_σ usw.) ist nach V, VI unmittelbar evident. f ist ein (M, N), also $g = \sup f_n$ ein $(M_\sigma, *)$, $h = \inf f_n$ ein $(*, N_\delta)$; das heißt

eben: *jedes P ist ein M_σ, jedes Q ein N_δ.* Ferner ist g ein $(P, *)$ oder $*, P_\delta)$, $\overline{\lim} f_n = \inf g_n$ ein $(*, P_{\delta\delta}) = (*, P_\delta)$, ebenso $\underline{\lim} f_n$ ein $(Q_\sigma, *)$, * ein (Q_σ, P_δ); also *jedes M^* ist ein Q_σ, jedes N^* ein P_δ.*

Um auch die zweite Hälfte (jedes M_σ ist ein P usw.) zu beweisen, benutzen wir die einfachen Hilfssätze, die auch nachher noch Verwendung finden:

(1) Zu jeder Menge M gibt es eine Funktion f, die in M positiv ist und sonst verschwindet.

Denn es gibt eine Funktion f mit $M = [f > 0]$, und man kann sie $\geqq 0$, übrigens auch $\leqq \varepsilon$ annehmen, indem man sie durch $f' = \max[f, 0]$ und $f'' = \min[f', \varepsilon]$ ersetzt.

(2) Zu jeder Menge M_σ gibt es eine Funktion F, die Limes einer gleichmäßig konvergenten Folge von Funktionen f, in M positiv ist und sonst verschwindet.

Ist $M_\sigma = M_1 \dot{+} M_2 \dot{+} \ldots$, so bestimmen wir zu M_n gemäß (1) eine Funktion f_n mit $0 \leqq f_n \leqq \varepsilon_n$, die in M_n positiv ist und sonst verschwindet; ist $\Sigma \varepsilon_n$ konvergent, so erfüllt

$$F = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots$$

die gestellten Forderungen.

(3) Zu jeder Menge M gibt es eine Funktion g, die in M gleich 1 ist und sonst verschwindet.

Wir bestimmen f gemäß (1); die Funktion $(n = 1, 2, \ldots)$

$$g = \lim \frac{nf}{1 + nf}$$

ist Limes aufsteigender f, in M gleich 1 und sonst gleich 0.

(4) Zu jeder Menge M_σ gibt es eine Funktion g, die in M_σ gleich 1 ist und sonst verschwindet.

Ist $M_\sigma = M_1 \dot{+} M_2 \dot{+} \ldots$, so bestimmen wir gemäß (3) eine Funktion g_n, die in M_n gleich 1 ist und sonst verschwindet; die Funktion

$$g = \sup g_n$$

erfüllt unsere Forderungen.

Aus (4) ergibt sich nun, daß $M_\sigma = [g > 0]$ ein P ist: *jedes M_σ ist ein P, jedes N_δ ein Q.* Andererseits ist $M_\sigma = [g \geqq \frac{1}{2}]$ auch ein N^*, da f jedenfalls ein f^* ist, also: *jedes P ist ein N^*, jedes Q ein M^*.* Wendet man sodann (2) nicht auf die Funktionen f, sondern auf die (wegen III denselben Axiomen $(\alpha)(\beta)(\gamma)$ genügenden) Funktionen f^* an, wobei F wegen IV wieder ein f^* ist, so ist $M_\sigma^* = [F > 0]$ ein M^*, also: *jedes M_σ^* ist ein M^*, jedes N_δ^* ein N^*.* Endlich folgt dann, daß jedes Q_σ ein

M_σ^* und daher ein M^* ist: *jedes* Q_σ *ist ein* M^*, *jedes* P_δ *ein* N^*. Da mit ist VII vollständig bewiesen.

Nunmehr gehen wir zu den *Umkehrungssätzen* über:

VIII. *Wenn der Limes jeder gleichmäßig konvergenten Folge von Funktionen* f *wieder ein* f *ist, so ist jede Funktion der Klasse* (M, N) *ein* f.

Sei φ von der Klasse (M, N). Wenn $y_1 < y_2$ ist, so gibt es ein Funktion f folgenden Verhaltens:

$$\text{für } \varphi \leqq y_1, \quad y_1 < \varphi < y_2, \quad \varphi \geqq y_2$$
$$\text{ist } \quad f = 0, \quad 0 < f < 1, \quad f = 1.$$

Denn zu der Menge $[\varphi > y_1]$, die ein M ist, gibt es nach (1) eine Funktion f_1, die in dieser Menge positiv und sonst 0 ist; ebenso zur Menge $[\varphi < y_2]$, die ein $R - N = M$ ist, eine entsprechende Funktion f_2. Dann ist überall $f_1 + f_2 > 0$ und $f = \frac{f_1}{f_1 + f_2}$ erfüllt die obige Forderung.

Sei nun φ zunächst beschränkt, etwa $0 \leqq \varphi \leqq 1$; wir wählen eine natürliche Zahl n und bestimmen (mit neuer Bedeutung von f_1, f_2) für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ eine Funktion f_ν so, daß für

$$\varphi \leqq \frac{\nu-1}{n}, \quad \frac{\nu-1}{n} < \varphi < \frac{\nu}{n}, \quad \varphi \geqq \frac{\nu}{n}$$
$$f_\nu = 0, \qquad 0 < f_\nu < 1, \quad f_\nu = 1.$$

Die Funktion

$$f = \frac{1}{n}(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)$$

ist wieder ein f. Ist, in einem Punkt x, $\frac{\nu-1}{n} < \varphi \leqq \frac{\nu}{n}$, so ist $f_1 = \cdots = f_{\nu-1} = 1$, $f_{\nu+1} = \cdots = f_n = 0$,

$$f = \frac{\nu-1}{n} + \frac{f_\nu}{n}, \quad \frac{\nu-1}{n} \leqq f \leqq \frac{\nu}{n},$$

also $|\varphi - f| \leqq \frac{1}{n}$ überall. Läßt man n unbegrenzt wachsen, so konvergiert f gleichmäßig nach φ, welches also nach Voraussetzung wieder ein f ist.

Ist Φ unbeschränkt und von der Klasse (M, N), so ist $\varphi = \frac{\Phi}{1 + |\Phi|}$ beschränkt und von derselben Klasse; denn die Menge $[\varphi > y]$ ist für $|y| < 1$ mit der Menge $[\Phi > Y]$, $Y = \frac{y}{1 - |y|}$ identisch, während sie für $y \geqq 1$ die Nullmenge und für $y \leqq -1$ der ganze Raum ist; 0 und R gehören nach dem Axiom (α) zu den Mengen M. Dasselbe gilt für $[\varphi \geqq y]$ und für den umgekehrten Schluß von φ auf Φ. Hiernach ist φ ein f und da $|\varphi| < 1$ ebenfalls ein f ist, so auch $\Phi = \frac{\varphi}{1 - |\varphi|}$.

Die Voraussetzung von VIII bezüglich der gleichmäßigen Konvergenz trifft nach IV jedenfalls für die Funktionen f^* zu, daher

IX. *Jede Funktion der Klasse* (M^*, N^*) *ist ein* f^*.

Sodann gilt:

X. *Jede nach unten beschränkte Funktion der Klasse* $(P, *)$ *ist ein* g.

Sei φ von der Klasse $(P, *)$ und etwa $\varphi > 0$. Wir wählen $\delta > 0$ und bestimmen für $n = 1, 2, 3, \ldots$ nach Hilfssatz (4) zu der Menge $[\varphi > n\delta]$ eine Funktion g_n (ein g), die in dieser Menge $= 1$ ist und sonst verschwindet. Die Reihe

$$g = \delta(g_1 + g_2 + g_3 + \ldots)$$

konvergiert für jedes x, da schließlich g_n verschwindet, und g ist als Limes aufsteigender g wieder ein g. Ist in einem Punkt $(n-1)\delta < \varphi \leqq n\delta$, so ist $g_1 = \ldots = g_{n-1} = 1$, $g_n = g_{n+1} = \ldots = 0$, also $g = (n-1)\delta$ und daher überall $0 < \varphi - g \leqq \delta$. Läßt man δ eine Folge von Zahlen $\to 0$ beschreiben, so konvergiert g nach φ und zwar aufsteigend bei passender Wahl der δ (z. B. $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$); φ ist also ebenfalls ein g.

Die Einschränkung in X läßt sich dahin mildern, daß es nur eine Funktion $f \leqq \varphi$ zu geben braucht. Der folgende Satz ist gänzlich frei von ihr:

XI. *Jede Funktion der Klasse* $(P, *)$ *ist Limes einer aufsteigenden Folge von Funktionen der Klasse* (P, Q).

Für eine nach unten beschränkte Funktion behauptet XI weniger als X, da jedes f auch von der Klasse (P, Q) ist. Sei also Φ von der Klasse $(P, *)$ und nicht beschränkt; die Funktion $\varphi = \frac{\Phi}{1+|\Phi|}$ ist von derselben Klasse und beschränkt, also ein g und daher Limes aufsteigender Funktionen f_n, die man von vornherein (indem man f_n durch $\max[f_n, -1]$ ersetzt) der Bedingung $-1 \leqq f_n \leqq \varphi < 1$ entsprechend annehmen kann. Verfahren wir nun wie beim Beweise von § 1, I, so erhalten wir Funktionen

$$k_n = f_n + \varepsilon_1(f_{n+1} - f_n) + \varepsilon_2(f_{n+2} - f_{n+1}) + \ldots,$$

die mit $-1 < k_n < 1$ aufsteigend nach φ konvergieren; dabei ist k_n als gleichmäßiger Limes von Funktionen f ein k, nach Satz II, also jedenfalls von der Klasse (P, Q). Von derselben Klasse sind die Funktionen $K_n = \frac{k_n}{1-|k_n|}$, die aufsteigend nach Φ konvergieren.

Die zu X, XI entsprechenden Sätze gelten für Funktionen der Klasse (P, Q). Jede beschränkte Funktion der Klasse (P, Q) ist ein k.

X und XI sind die Verallgemeinerungen des Baireschen Satzes über unterhalb stetige Funktionen. Der Hahnsche Einschiebungssatz überträgt sich, mit demselben Beweis wie § 1, II, in folgender Form:

XII. *Ist überall* $g \geqq h$, *so gibt es eine Funktion* k *mit* $g \geqq k \geqq h$.

Um den Ergänzungssatz zu übertragen, verstehen wir unter X irgend eine Teilmenge von R, und unter der Aussage, eine in X definierte Funktion $\varphi(x)$ sei von der Klasse (M, N), daß jede Menge $[\varphi > t]$ den Durchschnitt MX eines M mit X, jede Menge $[\varphi \geqq t]$ der Durchschnitt NX eines N mit X sei.

Sei nun Q_0 eine Menge Q, $P_0 = R - Q_0$ ihr Komplement, also ein P. Dann gilt:

XIII. *Eine in Q_0 definierte Funktion von der Klasse (P, Q) läßt sich zu einer im ganzen Raum definierten Funktion von dieser Klasse ergänzen.*

Es mögen x, y, z Punkte von Q_0, P_0, R bedeuten. Es sei $\varphi(x)$ von der Klasse (P, Q) und zunächst beschränkt, $\lambda \leqq \varphi(x) \leqq \mu$. Die durch

$$h(x) = \varphi(x), \quad h(y) = \lambda$$

definierte Funktion $h(z)$ ist ein h, nämlich beschränkt und von der Klasse $(*, Q)$, da die Menge $[h \geqq t]$ für $t > \lambda$ ein $Q\,Q_0$, also ein Q, und für $t \leqq \lambda$ der ganze Raum ist. Analog schließt man, daß die vermöge

$$g(x) = \varphi(x), \quad g(y) = \mu$$

definierte Funktion $g(z)$ ein g ist. Wegen $g(z) \geqq h(z)$ gibt es zwischen ihnen eine Funktion $k(z)$, also mit $k(x) = \varphi(x)$, die ein k und also von der Klasse (P, Q) ist. Überdies ist auch $\lambda \leqq k(z) \leqq \mu$.

Ist sodann $\Phi(x)$ unbeschränkt und von der Klasse (P, Q), so ist $\varphi(x) = \frac{\Phi(x)}{1 + |\Phi(x)|}$ beschränkt und von derselben Klasse; es gibt demnach eine Funktion $k_1(z)$, ein k, mit $-1 \leqq k_1(z) \leqq 1$ und $k_1(x) = \varphi(x)$. Nach Hilfssatz (2) gibt es aber eine Funktion $k_0(z)$, die in P_0 positiv ist, in Q_0 verschwindet und gleichmäßiger Limes von Funktionen f, also ebenfalls ein k ist. (Für stetige Funktionen f und abgeschlossenes Q_0 leistete dies die Funktion $\varrho(z) =$ Abstand des Punktes z von Q_0.) Die Funktion $k_1 - t k_0$ ist für reelles t wieder ein k, woraus folgt, daß die Funktion $k = \frac{k_1}{1 + k_0}$ von der Klasse (P, Q) und, weil beschränkt, wieder ein k ist; denn die Menge $\left[\frac{k_1}{1 + k_0} > t\right] = [k_1 - t k_0 > t]$ ist ein P usw. Wir haben nun eine Funktion k vom Betrage < 1 mit $k(x) = \varphi(x)$; die Funktion $K = \frac{k}{1 - |k|}$ ist dann jedenfalls von der Klasse (P, Q) und $K(x) = \Phi(x)$.

Eine leichte Ausdehnung des Ergänzungssatzes liefert:

XIV. *Sind $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ endlich viele Mengen Q, paarweise ohne gemeinsame Punkte, und $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ in ihnen definierte Funktionen von der Klasse (P, Q), so ist die in $Q_0 = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n$ definierte*

Funktion φ, die in Q_1 mit φ_1, in Q_2 mit φ_2, ..., in Q_n mit φ_n übereinstimmt, ebenfalls von der Klasse (P, Q) und läßt sich also zu einer im ganzen Raum definierten Funktion von dieser Klasse ergänzen.

In der Tat ist Q_0 ein Q; ferner ist $[\varphi \geqq t]$ Summe der Mengen $[\varphi_\nu \geqq t]$ und diese, als Durchschnitte zweier Q, sind wieder Mengen Q, also ist $[\varphi \geqq t]$ ein in Q_0 enthaltenes Q oder QQ_0; ebenso ist $[\varphi \leqq t]$ ein QQ_0, $[\varphi > t]$ ein $Q_0 - QQ_0 = (R - Q)Q_0 = PQ_0$, also φ in Q_0 von der Klasse (P, Q).

Als Gegenstück, das aber den Ergänzungssatz nicht zuläßt, möge noch der folgende Satz bemerkt werden:

XV. *Sind P_1, P_2, ... endlich oder abzählbar viele Mengen P, paarweise ohne gemeinsame Punkte, und φ_1, φ_2, ... in ihnen definierte Funktionen von der Klasse (P, Q), so ist die in $P_0 = P_1 + P_2 + \ldots$ definierte Funktion φ, die in P_1 mit φ_1, in P_2 mit φ_2, ... übereinstimmt, ebenfalls von der Klasse (P, Q).*

Denn P_0 ist ein P_σ, also, da die P mit den M_σ übereinstimmen, wieder ein P, und ähnlich wie zuvor erkennt man, daß die Menge $[\varphi > t]$ ein PP_0, die Menge $[\varphi \geqq t]$ ein QP_0 ist.

Schließen wir hiermit die allgemein mengentheoretische Untersuchung. Mit Hilfe ihrer Ergebnisse, die wir nur wiederholt anzuwenden haben, beherrschen wir alle Funktionen, die aus einem gegebenen Funktionensystem durch wiederholte Limesbildung hervorgehen; wir deuten dies speziell für die *Baireschen Funktionen* an, indem wir jetzt R als metrischen Raum voraussetzen. Es durchlaufe

$$\alpha = 0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \ldots$$

die Cantorschen Ordnungszahlen der ersten und zweiten Zahlenklasse.

Durch „transfinite Induktion" definieren wir die f^0 als die stetigen Funktionen und für $\alpha > 0$ die g^α, h^α, f^α als die Limites aufsteigender, absteigender, konvergenter Folgen von bereits definierten Funktionen f^ξ $(\xi < \alpha)$, die k^α als solche Funktionen, die gleichzeitig g^α und h^α sind. Die Menge der Funktionen f^α heiße die Klasse α, wobei jede Klasse die früheren enthält und in den späteren enthalten ist. Die zugehörigen Lebesgueschen Mengen

$$[f^\alpha > y], \quad [f^\alpha \geqq y], \quad [g^\alpha > y], \quad [h^\alpha \geqq y]$$

oder

$$M^\alpha, \qquad N^\alpha, \qquad P^\alpha, \qquad Q^\alpha$$

heißen die *Borelschen* (falls R ein euklidischer Raum ist: im Borelschen Sinne meßbaren) *Mengen* des Raumes R.

Wir haben dann die zuvor entwickelte Theorie in der Weise anzu-

wenden, daß wir unter den f die Funktionen f^ξ aller Klassen $< \alpha$ ver-stehen und die g, h, k, f^* also mit den $g^\alpha, h^\alpha, k^\alpha, f^\alpha$ identifizieren; eine erste Anwendung sichert induktiv, vermöge III, die Gültigkeit der Axiome $(\alpha)(\beta)(\gamma)$ für die Funktionen jeder Klasse α oder aller Klassen $< \alpha$. Zur Bestimmung der Borelschen Mengen liefert VII für $\alpha > 0$:

Die P^α sind die Summen aus Folgen von Mengen M^ξ, die Q^α die Durchschnitte aus Folgen von Mengen N^ξ von Klassen $\xi < \alpha$; die M^α sind die Q^α_σ, die N^α die P^α_δ.

Die Ausdrucksweise „die U sind die V“ ist so zu verstehen, daß jedes U ein V und jedes V ein U ist; wir schreiben das kurz $U = V$. Die M^0 sind die offenen Mengen B, die N^0 die abgeschlossenen Mengen A. Denn einerseits ist jedes M^0 ein B, andererseits jedes B ein M^0 als Menge $[\varrho > 0]$ der stetigen Funktion $\varrho(x) =$ Abstand des Punktes x von der abgeschlossenen Menge $A = R - B$ (übrigens ist hier die einzige Stelle, wo die Annahme eines *metrischen* Raumes zur Verwendung kommt; sonst würde auch ein topologischer Raum mit geeigneten Umgebungen genügen). Hiernach entstehen die Borelschen Mengen aus offenen oder abgeschlossenen Mengen durch wiederholte Summen- und Durchschnittsbildung über Mengenfolgen. Ferner ist $P^{\alpha+1} = M^\alpha_\sigma = M^\alpha$, $Q^{\alpha+1} = N^\alpha_\delta = N^\alpha$ (auch für $\alpha = 0$), so daß nur für Limeszahlen α die P^α, Q^α als Zwischenstufe zwischen den M^ξ, N^ξ und M^α, N^α eine eigene Rolle spielen; es ist auch $M^{\alpha+1} = N^\alpha_\sigma$, $N^{\alpha+1} = M^\alpha_\delta$. Für die ersten Ordnungszahlen hat man

$$M^0 = P^1 = B \qquad N^0 = Q^1 = A$$
$$M^1 = P^2 = A_\sigma \qquad N^1 = Q^2 = B_\delta$$
$$M^2 = P^3 = B_{\delta\sigma} \qquad N^2 = Q^3 = A_{\sigma\delta}$$
$$\dots \qquad \dots$$
$$P^\omega = M^0 + M^1 + M^2 + \dots \qquad Q^\omega = N^0 N^1 N^2 \dots$$
$$M^\omega = P^{\omega+1} = Q^\omega_\sigma \qquad N^\omega = Q^{\omega+1} = P^\omega_\delta$$
$$M^{\omega+1} = P^{\omega+2} = N^\omega_\sigma \qquad N^{\omega+1} = Q^{\omega+2} = M^\omega_\delta$$
$$\dots \qquad \dots$$

Die Umkehrungssätze lauten (vgl. VIII – XI):

Jede Funktion der Klasse (M^α, N^α) ist ein f^α. (Auch für $\alpha = 0$.)

Jede nach unten beschränkte Funktion der Klasse $(P^\alpha, *)$ ist ein g^α.

Jede Funktion der Klasse $(P^\alpha, *)$ ist Limes einer aufsteigenden Folge von Funktionen der Klasse (P^α, Q^α). Hieraus durch Vertauschung von α mit $\alpha + 1$:

Jede Funktion der Klasse $(M^\alpha, *)$ ist Limes einer aufsteigenden Folge von Funktionen f^α. (Auch für $\alpha = 0$: Satz von Baire.)

Die Funktionen $k^{\alpha+1}$ sind mit den f^α identisch, denn jedes $k^{\alpha+1}$ ist von der Klasse $(P^{\alpha+1}, Q^{\alpha+1}) = (M^\alpha, N^\alpha)$, also ein f^α. Nur für Limeszahlen α bilden die k^α eine Zwischenstufe zwischen den $f^\xi (\xi < \alpha)$ und den f^α.

Der Einschiebungssatz lautet:

Ist $g^\alpha \geqq h^\alpha$, so gibt es zwischen beiden eine Funktion k^α,

und durch Vertauschung von α mit $\alpha + 1$:

Ist g von der Klasse $(M^\alpha, *)$, h von der Klasse $(*, N^\alpha)$ und $g \geqq h$, so gibt es zwischen beiden eine Funktion f^α. (Auch für $\alpha = 0$: Satz von Hahn.)

Endlich der Ergänzungssatz:

Eine in Q (einem Q^α) definierte Funktion von der Klasse (P^α, Q^α) läßt sich zu einer im ganzen Raume definierten Funktion von dieser Klasse ergänzen,

und durch Vertauschung von α mit $\alpha + 1$:

Eine in N (einem N^α) definierte Funktion f^α läßt sich zu einer im ganzen Raume definierten Funktion f^α ergänzen. (Auch für $\alpha = 0$: Satz von Tietze).

XIV und XV werden, auf Bairesche Funktionen angewandt, mit Sätzen von Lebesgue im wesentlichen identisch.

(Eingegangen am 7. Juli 1919.)

Über das Problem der Gitterpunkte in einem Kreise.

Von

S. Wigert in Stockholm.

In der vorliegenden Abhandlung habe ich das obige Problem nach einer neuen Methode behandelt. Sie besteht in der Anwendung eines Diskontinuitätsfaktors, den Herr Helge von Koch[1]) früher mit großem Erfolg seinen Untersuchungen über das Primzahlproblem zugrunde gelegt hat. Zwar ist es mir nicht gelungen, durch diese Methode das schärfste bisher gewonnene Resultat[2]) völlig zu erreichen, indem ich bei dem Reste nur die Größenordnung $x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}$ beweisen kann. Es ist aber kaum zu bezweifeln, daß es möglich sei, diesem Übelstande abzuhelfen. Ich bin Herrn Prof. Landau zu bleibendem Danke verpflichtet, weil er mir durch seine Ratschläge es ermöglicht hat, sowohl meine Rechnungen zu vereinfachen als auch einige schwere Inkorrektheiten in der Beweisführung zu beseitigen.

§ 1.

Ausgangsformel. Größe des Fehlers bei endlichem Wert des Parameters s.

Es sei $r(m)$ die Anzahl der ganzzahligen Lösungen ($\gtrless 0$) der Gleichung $\xi^2+\eta^2=m$. Dann ist für $x>0$

$$\frac{1}{4}\sum_{1\leqq m\leqq x} r(m) = \sum_{\substack{\mu^2+\nu^2\leqq x \\ \mu,\nu\geqq 0}} (1) - [\sqrt{x}] - 1,$$

wo $[y]$ wie gewöhnlich die größte ganze Zahl $\leqq y$ bezeichnet. Ferner gilt für s reell und positiv:

---

[1]) Sur la distribution des nombres premiers, Acta Mathematica 24 (1901), S. 159–182.

[2]) Satz von Sierpiński: Restglied $= O(x^{\frac{1}{3}})$.

$$\lim_{s=\infty} e^{-x^s} = \begin{cases} 0 \text{ für } x > 1 \\ \frac{1}{e} \quad ,, \quad x = 1 \\ 1 \quad ,, \quad 0 < x < 1. \end{cases}$$

Setzt man daher $\bar{r}(m) = r(m)$, wenn m keine Quadratzahl ist, sonst aber $\bar{r}(m) = r(m) + 4$, so wird für $x > 0$

$$\sum_{\substack{\mu^2+\nu^2 \leqq x \\ \mu,\nu \geqq 0}} (1) = \sum_{\substack{0 \\ \mu,\nu}}^{\infty} \lim_{s=\infty} e^{-\left(\frac{\mu^2+\nu^2}{x}\right)^s} + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{e}\right)\bar{r}(x).$$

Hier sind nun, da die Reihe $\sum_{\mu,\nu} e^{-\left(\frac{\mu^2+\nu^2}{x}\right)^s}$ für $s \geqq 1$ gleichmäßig konvergiert, die Operationen $\sum_{\mu,\nu}$ und $\lim_{s}$ vertauschbar, so daß wir die folgende *Ausgangsformel* aufstellen können

$$(1) \qquad \frac{1}{4}\sum_{m \leqq x} r(m) = \lim_{s=\infty} \sum_{\substack{0 \\ \mu,\nu}}^{\infty} e^{-\left(\frac{\mu^2+\nu^2}{x}\right)^s} - [\sqrt{x}] - 1 + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{e}\right)\bar{r}(x).$$

Die wirkliche Ausführung des Grenzüberganges $s \to \infty$ ist schwierig und würde übrigens keinen Aufschluß über die gesuchte Größenordnung geben. Die formalen Rechnungen liefern (wenigstens bei nicht ganzzahligem x) in der Tat die von Herrn Hardy[3]) gegebene Reihenentwicklung der Funktion $\sum_{m<x} r(m)$, deren Größenordnung unbekannt ist. Wir lassen daher s endlich und müssen dann untersuchen, wie groß der dabei begangene Fehler ausfällt. Man hat zunächst

$$\sum_{\substack{0 \\ \mu,\nu}}^{\infty} e^{-\left(\frac{\mu^2+\nu^2}{x}\right)^s} = \frac{1}{4} V_s + W_s,$$

wo

$$V_s = \sum_{m=1}^{\infty} r(m)\, e^{-\left(\frac{m}{x}\right)^s}, \qquad W_s = \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\left(\frac{\nu^2}{x}\right)^s}.$$

Es sei nun ε eine beliebig kleine, aber *feste*, positive Zahl < 1, $s \geqq 2$ und $x \geqq 1$. Dann ist[4])

---

[3]) Quarterly Journal **46** (1915), S. 263–283.

[4]) Wenn s fest gedacht ist, so liefert zwar die partielle Summation $\sum_{m<x} r(m)\, m^s = \frac{\pi x^{s+1}}{s+1} + o(x^{s+1})$. In welcher Weise aber der Ausdruck $\sum_{m<x} r(m)\left(\frac{m}{x}\right)^s - \frac{\pi x}{s+1}$ bei festem x für $s \to \infty$ gegen Null strebt, habe ich nicht entscheiden können.

$$V_\infty - V_s = \sum_{m<x} r(m) + \frac{1}{e} r(x) - \sum_{m=1}^{\infty} r(m)\, e^{-\left(\frac{m}{x}\right)^s}$$

$$= \sum_{m<x} r(m)\{1 - e^{-\left(\frac{m}{x}\right)^s}\} - \sum_{m>x} r(m)\, e^{-\left(\frac{m}{x}\right)^s},$$

und

$$\sum_{m<x} r(m)\{1 - e^{-\left(\frac{m}{x}\right)^s}\} \leqq \sum_{m<x} r(m)\left(\frac{m}{x}\right)^s = O(x^\varepsilon) + \sum_{m<x-1} r(m)\left(\frac{m}{x}\right)$$

$$= O(x^\varepsilon) + O\left(x^{\varepsilon-s} \int_1^x t^s\, dt\right) = O(x^\varepsilon) + \frac{1}{s} O(x^{1+\varepsilon}).$$

Das Zeichen O bezieht sich hier wie im folgenden auf x als Veränderliche und gilt *gleichmäßig* für $s \geqq 2$. Ferner wird

$$\sum_{m>x} r(m)\, e^{-\left(\frac{m}{x}\right)^s} = O(x^\varepsilon) + \sum_{m>x+1} r(m)\, e^{-\left(\frac{m}{x}\right)^s} = O(x^\varepsilon) + O\left(\sum_{m>x+1} m^\varepsilon \left(\frac{x}{m}\right)^s\right)$$

$$= O(x^\varepsilon) + O\left(x^s \int_x^\infty \frac{dt}{t^{s-\varepsilon}}\right) = O(x^\varepsilon) + \frac{1}{s} O(x^{1+\varepsilon}),$$

so daß schließlich

$$V_\infty - V_s = O(x^\varepsilon) + \frac{1}{s} O(x^{1+\varepsilon}).$$

Für die Reihe W_s findet man in analoger Weise

$$W_\infty - W_s = O(1) + \frac{1}{s} O(\sqrt{x}),$$

und wir können also die Gleichung (1) durch die folgende ersetzen

$$(2) \qquad \frac{1}{4} \sum_{m \leqq x} r(m) = \sum_{\substack{0 \\ \mu,\nu}}^{\infty} e^{-\left(\frac{\mu^2+\nu^2}{x}\right)^s} - \sqrt{x} + O(x^\varepsilon) + \frac{1}{s} O(x^{1+\varepsilon}).$$

Um die Doppelreihe rechts zu untersuchen, bedienen wir uns einer Verallgemeinerung der Summationsformel von Euler-Maclaurin, welche im nächsten Paragraphen auseinandergesetzt werden soll.

§ 2.

Summationsformel für eine Funktion zweier Veränderlichen nebst Anwendung.

Es sei $f(\xi, \eta)$ eine reelle oder komplexe Funktion der reellen Veränderlichen ξ, η, welche für $\left.\begin{matrix}\xi \\ \eta\end{matrix}\right\} \geqq 0$ nebst ihren Ableitungen $f_1 = \frac{\partial f}{\partial \xi}$, $f_2 = \frac{\partial f}{\partial \eta}$

und $f_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \, \partial \eta}$ stetig ist. Bezeichnen wir jetzt mit $P(\xi)$ die oszillierende Funktion $\frac{1}{2} - \xi + [\xi]$, so ist bekanntlich (Formel von Euler-Maclaurin)

$$\sum_{\mu=0}^{p} f(\mu . \nu) = \int_0^p f(\xi, \nu)\, d\xi + \tfrac{1}{2}\{f(p, \nu) + f(0, \nu)\} - \int_0^p P(\xi) f_1(\xi, \nu)\, d\xi,$$

und also

$$\sum_{\mu=0}^{p} f(\mu, \nu) = \int_0^p \Big(\sum_{\nu=0}^{q} f(\xi, \nu)\Big) d\xi + \frac{1}{2}\Big\{\sum_{\nu=0}^{q} f(p, \nu) + \sum_{\nu=0}^{q} f(0, \nu)\Big\} - \int_0^p P(\xi)\Big(\sum_{\nu=0}^{q} f_1(\xi, \nu)\Big) d\xi.$$

Weil aber auch

$$\sum_{\nu=0}^{q} f(\xi, \nu) = \int_0^q f(\xi, \eta)\, d\eta + \tfrac{1}{2}\{f(\xi, q) + f(\xi, 0)\} - \int_0^q P(\eta) f_2(\xi, \eta)\, d\eta,$$

$$\sum_{\nu=0}^{q} f(p, \nu) = \int_0^q f(p, \eta)\, d\eta + \tfrac{1}{2}\{f(p, q) + f(p, 0)\} - \int_0^q P(\eta) f_2(p, \eta)\, d\eta,$$

$$\sum_{\nu=0}^{q} f(0, \nu) = \int_0^q f(0, \eta)\, d\eta + \tfrac{1}{2}\{f(0, q) + f(0, 0)\} - \int_0^q P(\eta) f_2(0, \eta)\, d\eta,$$

$$\sum_{\nu=0}^{q} f_1(\xi, \nu) = \int_0^q f_1(\xi, \eta)\, d\eta + \tfrac{1}{2}\{f_1(\xi, q) + f_1(\xi, 0)\} - \int_0^q P(\eta) f_{12}(\xi, \eta)\, d\eta,$$

so erhalten wir die folgende Gleichung

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu=0}^{p}\sum_{\nu=0}^{q} f(\mu, \nu) &= \int_0^p\int_0^q f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \tfrac{1}{2}\int_0^p f(\xi, q)\, d\xi + \tfrac{1}{2}\int_0^p f(\xi, 0) d\xi - \int_0^p d\xi \int_0^q P(\eta) f_2(\xi, \eta) d\eta \\
&+ \tfrac{1}{2}\int_0^q f(p, \eta)\, d\eta + \tfrac{1}{4} f(p, q) + \tfrac{1}{4} f(p, 0) - \tfrac{1}{2}\int_0^q P(\eta) f_2(p, \eta)\, d\eta + \tfrac{1}{2}\int_0^q f(0, \eta)\, d\eta \\
&+ \tfrac{1}{4} f(0, q) + \tfrac{1}{4} f(0, 0) - \tfrac{1}{2}\int_0^q P(\eta) f_2(0, \eta)\, d\eta - \int_0^p P(\xi)\, d\xi \int_0^q f_1(\xi, \eta)\, d\eta \\
&- \tfrac{1}{2}\int_0^p P(\xi) f_1(\xi, q)\, d\xi - \tfrac{1}{2}\int_0^p P(\xi) f_1(\xi, 0)\, d\xi + \int_0^p\int_0^q P(\xi) P(\eta) f_{12}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.
\end{aligned}$$

Nehmen wir nun an, die Funktion $f(\xi, \eta)$ sei $= e^{-\left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{x}\right)^s}$. Dann verschwinden rechts in der Gleichung (3) für $p \to \infty$, $q \to \infty$ diejenigen von den 16 Gliedern, welche die Nummer 2, 5, 6, 7, 8, 10, 14 tragen, während die übrig gebliebenen 9 absolut konvergent sind. Wir bekommen also die Formel

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} f(\mu,\nu) = \int_0^\infty\int_0^\infty f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta + \tfrac{1}{2}\int_0^\infty f(\xi,0)\,d\xi - \int_0^\infty d\xi\int_0^\infty P(\eta) f_2(\xi,\eta)\,d\eta \\ &+ \tfrac{1}{2}\int_0^\infty f(0,\eta)\,d\eta + \tfrac{1}{4} f(0,0) - \tfrac{1}{2}\int_0^\infty P(\eta) f_2(0,\eta)\,d\eta - \int_0^\infty P(\xi)\,d\xi\int_0^\infty f_1(\xi,\eta)\,d\eta \\ &- \tfrac{1}{2}\int_0^\infty P(\xi) f_1(\xi,0)\,d\xi + \int_0^\infty\int_0^\infty P(\xi) P(\eta) f_{12}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta, \end{aligned}\right.$$

und weil $f(\xi,\eta)$ eine symmetrische Funktion ist, so geht endlich (4) in

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} f(\mu,\nu) = \int_0^\infty\int_0^\infty f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta + \int_0^\infty f(\xi,0)\,d\xi + \tfrac{1}{4} f(0,0) - \int_0^\infty P(\xi) f_1(\xi,0)\,d\xi \\ &- 2\int_0^\infty P(\xi)\,d\xi\int_0^\infty f_1(\xi,\eta)\,d\eta + \int_0^\infty\int_0^\infty P(\xi) P(\eta) f_{12}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \end{aligned}\right.$$

über. Es ist diese Summationsformel, von welcher wir jetzt Gebrauch machen wollen. Man hat nun

$$f_1(\xi,\eta) = -\frac{2s\xi}{x}\left(\frac{\xi^2+\eta^2}{x}\right)^{s-1} f(\xi,\eta),$$

$$f_{12}(\xi,\eta) = \frac{4\xi\eta}{x^2}\left\{s^2\left(\frac{\xi^2+\eta^2}{x}\right)^{2s-2} - s(s-1)\left(\frac{\xi^2+\eta^2}{x}\right)^{s-2}\right\} f(\xi,\eta),$$

und es ergibt sich sofort

$$\int_0^\infty\int_0^\infty f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^\infty e^{-\left(\frac{\varrho^2}{x}\right)^s}\varrho\,d\varrho = \frac{\pi x}{4}\int_0^\infty e^{-t^s}\,dt$$

$$= \frac{\pi x}{4}\Gamma\left(1+\frac{1}{s}\right) = \frac{\pi x}{4} + \frac{1}{s}O(x),$$

$$\int_0^\infty f(\xi,0)\,d\xi = \sqrt{x}\,\Gamma\left(1+\frac{1}{2s}\right) = \sqrt{x} + \frac{1}{s}O(\sqrt{x}),$$

$$\left|\int_0^\infty P(\xi) f_1(\xi,0)\,d\xi\right| < \frac{1}{2}\int_0^\infty |f_1(\xi,0)|\,d\xi = \tfrac{1}{2}.$$

Wir betrachten ferner das Integral $\int_0^\infty P(\xi)\,d\xi\int_0^\infty f_1(\xi,\eta)\,d\eta$, welches durch Einführung von Polarkoordinaten die Form annimmt

$$-\frac{2s}{x}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\int_0^\infty P(\varrho\cos\theta)\,e^{-\left(\frac{\varrho^2}{x}\right)^s}\left(\frac{\varrho^2}{x}\right)^{s-1}\varrho^2\,d\varrho = -\sqrt{x}\int_0^\infty e^{-\omega}\,\omega^{\frac{1}{2s}}\,\psi(\omega^{\frac{1}{s}})\,d\omega,$$

indem wir

$$(6)\qquad \psi(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} P(\sqrt{xt}\cos\theta)\cos\theta\,d\theta$$

gesetzt haben. Wendet man hier die für nicht ganzes y gültige Reihenentwicklung

$$P(y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi m y}{\pi m}$$

an, so kann die Integration in (6) gliedweise ausgeführt werden; denn die Summe $\sum_{m=1}^{k} \frac{\sin 2\pi m y}{\pi m}$ ist in bezug auf y und k gleichmäßig beschränkt[5]). Es ist aber[6])

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\pi m \sqrt{xt} \cos\theta) \cos\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2} J_1(2\pi m \sqrt{xt}),$$

wo J_1 die Besselsche Funktion mit dem Parameter 1 bezeichnet, und man hat demnach für $t > 0$

$$(7) \qquad \psi(t) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} J_1(2\pi m \sqrt{xt}), \qquad |\psi(t)| < \frac{C}{\sqrt[4]{xt}},$$

wobei unter C eine absolute Konstante verstanden wird.

Das Integral

$$-\sqrt{x} \int_0^{\infty} e^{-\omega} \omega^{\frac{1}{2s}} \psi(\omega^{\frac{1}{s}}) \, d\omega$$

ist in bezug auf s gleichmäßig konvergent und nähert sich für $s \to \infty$ dem Werte

$$-\sqrt{x}\psi(1) = -\frac{1}{2}\sqrt{x} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} J_1(2\pi m \sqrt{x}) = O(\sqrt[4]{x}).$$

Läßt man s endlich, so hat man jedenfalls

$$\left| \int_0^{\infty} P(\xi) \, d\xi \int_0^{\infty} f_1(\xi, \eta) \, d\eta \right| < K \sqrt[4]{x} \int_0^{\infty} e^{-t'} s t^{s-\frac{3}{4}} \, dt = K \sqrt[4]{x} \, \Gamma\left(1 + \frac{1}{4s}\right).$$

Im folgenden werden wir den genauen Wert des Integrales bei endlichem s noch zu besprechen haben.

Gehen wir jetzt zu dem letzten Doppelintegrale über. Die einfachste Abschätzung zeigt, daß es $= s\,O(1)$ ist, was indessen für unsere Zwecke nicht ausreicht. Wir können aber schreiben

---

[5]) Vgl. z. B. Kneser, Math. Annalen 60 (1905), S. 402–423 und Landau, diese Zeitschr. 2 (1918), S. 350–351.

[6]) Nielsen, Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen, Leipzig 1904, S. 60, Formel 8.

$$\int_0^\infty\int_0^\infty P(\xi)\,P(\eta)\,f_{12}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\,d\theta \int_0^\infty P(\sqrt{x}\,\omega^{\frac{1}{2s}}\sin\theta)\,P(\sqrt{x}\,\omega^{\frac{1}{2s}}\cos\theta)\,e^{-\omega}(s\omega - s + 1)\,d\omega$$

$$= 2\int_0^\infty \varphi(\sqrt{x}\,\omega^{\frac{1}{2s}})(s\omega - s + 1)\,e^{-\omega}\,d\omega,$$

wo $\varphi(y)$ die Funktion

$$\varphi(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} P(y\sin\theta)\,P(y\cos\theta)\sin\theta\cos\theta\,d\theta \tag{8}$$

bezeichnet. Hier läßt sich nun wieder die Reihenentwicklung der Funktion P anwenden, und wir bekommen zunächst

$$\varphi(y) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{k=\infty} \sum_{m=1}^{k} \frac{\sin(2\pi m y\sin\theta)}{m} \sum_{n=1}^{k} \frac{\sin(2\pi n y\cos\theta)}{n} \sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\lim_{k=\infty} \sum_{m,n}^{k} \frac{1}{mn}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\pi m y\sin\theta)\sin(2\pi n y\cos\theta)\sin\theta\cos\theta\,d\theta.$$

Die hier entstehende Reihe ist aber absolut konvergent, denn man hat[7])

$$(\sin\theta = t)$$

$$\int_0^1 \sin 2\pi m y t\sin(2\pi n y\sqrt{1-t^2})\,t\,dt = \frac{\pi}{2}\frac{mn}{m^2+n^2}J_2(2\pi y\sqrt{m^2+n^2})$$

und folglich wird

$$\varphi(y) = \frac{1}{2\pi}\sum_{m,n}^{\infty} \frac{J_2(2\pi y\sqrt{m^2+n^2})}{m^2+n^2} = \frac{1}{8\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r_1(m)}{m}J_2(2\pi y\sqrt{m}), \tag{9}$$

wobei $r_1(m) = r(m)$, wenn m keine Quadratzahl, sonst aber $= r(m) - 4$ ist. Ein Blick auf Gleichung (9) lehrt uns, daß $\varphi(y) = O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$ ist, und daher

$$\left|2\int_0^\infty \varphi(\sqrt{x}\,\omega^{\frac{1}{2s}})(s\omega - s + 1)\,e^{-\omega}\,d\omega\right| < \frac{C's}{\sqrt[4]{x}},$$

wo C' wieder eine absolute Konstante bedeutet.

---

[7]) Landau, Wiener Berichte 124 (1915), Abt. 2a, S. 469–505, zweiter Teil, § 1, Hilfssatz 5.

Stellt man die bisher gewonnenen Resultate zusammen, so ist leicht zu sehen, daß man nur $s = x^{\frac{5}{8}}$ zu setzen braucht, um die Gleichung

$$\sum_{m \leqq x} r(m) = \pi x + O(x^{\frac{3}{4}+\varepsilon})$$

herauszubekommen. Hier haben wir zwar das elementare Restglied $O(\sqrt{x})$ hinter uns gelassen, aber die Größenordnung $x^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$ doch nicht erreicht. Um aber einen weiteren Schritt zu tun, geben wir dem schon betrachteten Integrale die Form

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty (s\omega - s + 1)\, e^{-\omega} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_1(m)}{m} J_2(2\pi\sqrt{mx}\,\omega^{\frac{1}{2s}})\, d\omega$$

und bemerken, daß

$$\left| \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{r_1(m)}{m} J_2(2\pi\sqrt{mx}\,\omega^{\frac{1}{2s}}) \right| < \frac{C''\omega^{-\frac{1}{4s}}}{\sqrt[4]{x}} \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{1}{m^{\frac{5}{4}-\varepsilon'}}, \qquad (0 < \varepsilon' < \tfrac{1}{4}),$$

$$\left| \int_0^\infty (s\omega - s + 1)\, e^{-\omega} \sum_{m=k+1}^{\infty} d\omega \right| < \frac{C''}{\sqrt[4]{x}} \frac{k^{\varepsilon'-\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}-\varepsilon'} \int_0^\infty (s\omega + s + 1)\, e^{-\omega}\, \omega^{-\frac{1}{4s}}\, d\omega,$$

was für $k \to \infty$ verschwindet. Wir können also die Reihe gliedweise integrieren und bekommen dafür den Ausdruck[8])

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_1(m)}{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\underline{\nu}\,\underline{\nu+2}} (\pi^2 mx)^{\nu+1} \int_0^\infty (s\omega - s + 1)\, \omega^{\frac{\nu+1}{s}}\, e^{-\omega}\, d\omega$$

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_1(m)}{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\underline{\nu}\,\underline{\nu+1}} \Gamma\left(1 + \frac{\nu+1}{s}\right) (\pi^2 mx)^{\nu+1} = \frac{\pi x}{4} \sum_{m=1}^{\infty} r_1(m)\, g(\pi^2 mx, s),$$

indem wir die ganze Funktion von x

(10) $$g(x,s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu x^\nu}{\underline{\nu}\,\underline{\nu+1}} \Gamma\left(1 + \frac{\nu+1}{s}\right)$$

einführen, welche für $s \to \infty$ in $\frac{1}{\sqrt{x}} J_1(2\sqrt{x})$ übergeht.

[8]) Es ist leicht zu zeigen, daß im allgemeinen:

$$g_\lambda^{(p)}(t) = \sum_{\nu=p}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{t}{2}\right)^{2\nu+\lambda}}{\underline{\nu}\,\underline{\nu+\lambda}} = (-1)^p \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2p+\lambda}}{\underline{p-1}} \int_0^1 (1-v)^{p-1} \varphi_{p+\lambda}\left(\frac{t^2}{4} v\right) d \quad ,$$

wo $\varphi_\lambda(t) = t^{-\frac{\lambda}{2}} J_\lambda(2\sqrt{t}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu t^\nu}{\underline{\nu}\,\underline{\nu+\lambda}}$. Hieraus folgt dann: $|g_\lambda^{(p)}(t)| < C \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2p+\lambda}}{\underline{p}}$ -

und

$$s\omega - s + 1)\, e^{-\omega}\, g_2^{(p)}(2\pi\sqrt{mx}\,\omega^{\frac{1}{2s}})\, d\omega \Big| < \bar{C} s \frac{(\pi^2 mx)^{p+1}}{\underline{p-1}} \Gamma\left(1 + \frac{p+1}{s}\right) \to 0 \text{ für } p \to \infty,$$

wodurch auch die nachstehende gliedweise Integration sich als erlaubt erweist.

Die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} r_1(m)\, g(\pi^2 m x, s)$ ist übrigens absolut konvergent, denn wir haben sowohl

$$(11) \qquad \left| g(x,s) \right| < \frac{1}{x} \left| \int_0^{\infty} (s\omega - s + 1)\, e^{-\omega} J_2(2\sqrt{x}\,\omega^{\frac{1}{2s}})\, d\omega \right| < \frac{K' s}{x^{5/4}},$$

als auch

$$(11^*) \qquad g(x,s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu x^\nu}{\lfloor \nu \rfloor \lfloor \nu+1 \rfloor} \int_0^{\infty} \omega^{\frac{\nu+1}{s}} e^{-\omega}\, d\omega \,.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{\infty} \omega^{\frac{1}{2s}} e^{-\omega} J_1(2\sqrt{x}\,\omega^{\frac{1}{2s}})\, d\omega = O\left(\frac{1}{x^{3/4}}\right).$$

Gehen wir nun zur Gleichung (7) zurück, so zeigt es sich sofort, daß

$$-2 \int_0^{\infty} P(\xi)\, d\xi \int_0^{\infty} f_1(\xi,\eta)\, d\eta = \pi x \sum_{m=1}^{\infty} g(\pi^2 m^2 x, s),$$

und nach der Definition von $r_1(m)$ sind wir damit zu der folgenden Formel gelangt

$$(12) \qquad \sum_{m \leqq x} r(m) = \pi x + \pi x \sum_{m=1}^{\infty} r(m)\, g(\pi^2 m x, s) + O(x^s) + \frac{1}{s} O(x^{1+s}).$$

Unter Benutzung der beiden Relationen

$$\sum_{m \leqq x} \frac{r(m)}{m^{3/4}} = O(x^{\frac{1}{4}}), \qquad \sum_{m > x} \frac{r(m)}{m^{5/4}} = O(x^{-\frac{1}{4}}),$$

welche durch partielle Summation leicht zu beweisen sind, findet man dann

$$\begin{cases} \left| x \sum_{m \leqq \frac{s^2}{x}} r(m)\, g(\pi^2 m x, s) \right| < A\, x^{\frac{1}{4}} \sum_{m \leqq \frac{s^2}{x}} \frac{r(m)}{m^{3/4}} = \sqrt{s}\, O(1), \\ \left| x \sum_{m > \frac{s^2}{x}} r(m)\, g(\pi^2 m x, s) \right| < A\; s x^{-\frac{1}{4}} \sum_{m > \frac{s^2}{x}} \frac{r(m)}{m^{5/4}} = \sqrt{s}\, O(1), \end{cases}$$

und die Annahme $s = x^{2/3}$ liefert also

$$\sum_{m \leqq x} r(m) = \pi x + O(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}),$$

w. z. b. w.

Stockholm, im Mai 1919.

(Eingegangen am 8. Juli 1919.)

Über die Gitterpunkte in einem Kreise.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Die vorangehende Arbeit von Herrn Wigert gibt mir Veranlassung, meinen alten Beweis des Sierpińskischen Satzes hier abzudrucken; denn er kam bei mir bisher nur in allgemeinere Untersuchungen eingerahmt vor, und ich möchte zeigen, wie einfach er im Verhältnis zur Tiefe des Zieles ist. Aus der Theorie der Besselschen Funktionen benutze ich die Gleichungen

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} \frac{e^{As-\frac{B}{s}}}{s^4}\,ds = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{3}{2}} J_3(2\sqrt{AB}) \quad (A>0,\ B>0),$$

$$\frac{d}{dy}\left(y^{\frac{3}{2}} J_3(\sqrt{y})\right) = \frac{1}{2} y J_2(\sqrt{y}), \quad \frac{d}{dy}\left(y J_2(\sqrt{y})\right) = \frac{1}{2}\sqrt{y} J_1(\sqrt{y}) \quad (y>0),$$

und die Ungleichungen ($c_1, c_2, \ldots$ sind absolute Konstanten)

$$|J_1(y)| < \frac{c_1}{\sqrt{y}}, \qquad |J_2(y)| < \frac{c_2}{\sqrt{y}} \qquad (y>0);$$

hiernach ist für $x \geqq 1$, $z = x + x^{\frac{1}{3}}$, $m \geqq 1$ der Ausdruck

$$|z J_2(2\pi\sqrt{mz}) - x J_2(2\pi\sqrt{mx})| \text{ einerseits}$$

$$= (z-x)\left|\tfrac{1}{2}\xi J_1(\xi)\right| \quad (2\pi\sqrt{mx} < \xi < 2\pi\sqrt{mz}),$$

also

$$< c_3 x^{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{mx} = c_3 m^{\frac{1}{4}} x^{\frac{7}{12}},$$

andererseits

$$\leqq z|J_2(2\pi\sqrt{mz})| + x|J_2(2\pi\sqrt{mx})| < c_4 x (mx)^{-\frac{1}{4}} = c_4 m^{-\frac{1}{4}} x^{\frac{3}{4}}.$$

Ferner benutze ich die Thetaformel

$$\vartheta(s) = \sum_{a=-\infty}^{\infty} e^{-\pi a^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}}\vartheta\left(\frac{1}{s}\right)$$

in der Umformung ($r(m) =$ Lösungszahl von $m = a^2 + b^2$)

$$\sum_{m=0}^{\infty} r(m) e^{-\pi m s} = \vartheta^2(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}\sum_{m=1}^{\infty} r(m) e^{-\frac{\pi m}{s}}.$$

Ich setze nun $A(x) = \sum_{m \leqq x} r(m)$ $(x \geqq 0)$; für $x > 0$ ist

$$\int_0^x dy \int_0^y A(w)\,dw = \frac{1}{2}\sum_{m\leqq x} r(m)(x-m)^2 = \frac{1}{2\pi^3 i}\sum_{m=0}^{\infty} r(m) \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} \frac{e^{\pi(x-m)s}}{s^3}\,ds$$

$$= \frac{1}{2\pi^3 i}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} \frac{e^{\pi x s}}{s^3}\,\vartheta^2(s)\,ds = \frac{1}{2\pi^3 i}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} \frac{e^{\pi x s}}{s^4}\,ds + \frac{1}{2\pi^3 i}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} \sum_{m=1}^{\infty} r(m)\frac{e^{\pi x s - \frac{\pi m}{s}}}{s^4}\,ds$$

$$= \frac{\pi}{6}x^3 + \frac{1}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r(m)}{m^{\frac{3}{2}}}x^{\frac{3}{2}}J_3(2\pi\sqrt{mx})\ ^{1}).$$

Durch Differentiation, welche rechts gliedweise erlaubt ist (da die entstehende Reihe bei jedem festen $x_0 > 0$ für $0 < x < x_0$ gleichmäßig konvergiert), ergibt sich

$$\int_0^x A(w)\,dw = \frac{\pi}{2}x^2 + \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r(m)}{m}\,x\,J_2(2\pi\sqrt{mx}).$$

Für $x \geqq 1$, $z = x + x^{\frac{1}{3}}$ ist also

$$\int_x^z A(w)\,dw = \pi x^{\frac{4}{3}} + \frac{\pi}{2}x^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r(m)}{m}\left(z\,J_2(2\pi\sqrt{mz}) - x\,J_2(2\pi\sqrt{mx})\right)$$

$$= \pi x^{\frac{4}{3}} + O(x^{\frac{2}{3}}) + O\sum_{m\leqq x^{\frac{1}{3}}}\frac{r(m)}{m}m^{\frac{1}{4}}x^{\frac{7}{12}} + O\sum_{m>x^{\frac{1}{3}}}\frac{r(m)}{m}m^{-\frac{1}{4}}x^{\frac{3}{4}}$$

$$= \pi x^{\frac{4}{3}} + O(x^{\frac{2}{3}}) + O(x^{\frac{7}{12}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}}) + O(x^{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}}) = \pi x^{\frac{4}{3}} + O(x^{\frac{2}{3}}).$$

Aus

$$x^{\frac{1}{3}}A(x) \leqq \int_x^z A(w)\,dw \leqq x^{\frac{1}{3}}A(z)$$

folgt also einerseits

$$A(x) \leqq \pi x + O(x^{\frac{1}{3}}),$$

andererseits

$$A(z) \geqq \pi x + O(x^{\frac{1}{3}}) = \pi z + O(z^{\frac{1}{3}}),$$

also, da z von 2 an stetig über alle Grenzen wächst,

$$A(x) \geqq \pi x + O(x^{\frac{1}{3}}).$$

Göttingen, den 5. Juli 1919.

---

[1]) Rechtfertigung der letzten Vertauschung von Integration und Summation:

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{\pi x - \frac{\pi m}{1+t^2}}}{(1+t^2)^2}\,dt < e^{\pi x}\int_0^1 \frac{e^{-\frac{\pi m}{2}}}{1}\,dt + e^{\pi x}\int_1^{\infty}\frac{e^{-\frac{\pi m}{2t^2}}}{t^4}\,dt < e^{\pi x}e^{-\frac{\pi m}{2}} + e^{\pi x}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{\pi m}{2t^2}}}{t^4}\,dt$$

$$= e^{\pi x}\left(e^{-\frac{\pi m}{2}} + c_5 m^{-\frac{3}{2}}\right) < c_6 e^{\pi x} m^{-\frac{3}{2}},$$

so daß $\sum_{m=1}^{x} r(m)\int_0^{\infty}$ konvergiert.

(Eingegangen am 8. Juli 1919.)